

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

58. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 17. APRIL 1953)

QA1
M88
v. 58-60



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1953

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechslungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O , sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,

E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

58. Band	Inhalt	1. Heft Seite
Clowes, J. S., and K. A. Hirsch, Simple Groups of Infinite Matrices		1
Hadwiger, H., Lineare additive Polyederfunktionale und Zerlegungsgleichheit . . .		4
Lorenzen, P., Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen . .		15
Behrens, E.-A., Assoziativ auflösbare Ringe		25
Grotemeyer, K. P., Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand		41
Zeller, K., FK -Räume und Matrixtransformationen		46
Nickel, K., Lösung von zwei verwandten Integralgleichungssystemen		49
Unkelbach, H., Über die Approximation schlichter konformer Abbildungen durch kongruente Iterationen spezieller sterniger oder konvexer konformer Abbildungen		63
Richert, H.-E., Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. II . . .		71
Tillmann, H. G., Spektraltheoriefreie Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum . .		85
Föllinger, O., Ebene Variationsprobleme mit freien Endpunkten		98

Simple Groups of Infinite Matrices.

By

J. S. CLOWES and K. A. HIRSCH.

Several examples of infinite simple groups have been given in recent years. Apart from the alternating group on a set of any cardinal we mention (i) groups in which all elements other than unity form a single conjugate class [1]; (ii) a finitely generated infinite simple group [2]; (iii) an ordered group which is algebraically simple [3]; (iv) free products which are simple groups [4].

In this paper we present a new type of simple groups consisting of infinite matrices associated with an arbitrary field. These examples have arisen from a study of the rings of endomorphisms of countable primary Abelian groups¹.

Let $\mathfrak{F}$ be an arbitrary field. We consider infinite row-finite matrices $A = (a_{ij})$ with coefficients in $\mathfrak{F}$ satisfying the following condition: *There exists an integer $N = N(A)$ such that*

- (i) *for $j > N$: $a_{ij} = 1$ and $a_{ij} = 0$, if $i \neq j$;*
- (ii) *the determinant $\|a_{ij}\| = 1$ ($i, j = 1, 2, \dots, N(A)$).*

It is easy to see that the set of all such matrices forms a group $G = G(\mathfrak{F})$.

Theorem. *$G(\mathfrak{F})$ is a simple group.*

We conduct the proof in three stages. In (1) we give a set of generators for G of a special form; in (2) we show that all these generators are conjugate to each other so that G can be generated by a single element and its conjugates; in (3) we construct one of these generators from an arbitrary matrix A of G and its conjugates.

(1) Let $E_{ij}(x)$ ($i \neq j$) be the matrix which arises from the infinite unit matrix E by inserting the element x of $\mathfrak{F}$ at the place (i, j) . Let G' be the group generated by the matrices $E_{ij}(x)$ and their conjugates. We show that $G' = G$. It is quite clear that for a fixed N the matrices $E_{ij}(x)$ with $i, j = 1, 2, \dots, N$ generate the subgroup of G of all matrices of the form

$$\begin{pmatrix} X & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

where X is an element of the Special Linear group $SL(N, \mathfrak{F})$ (cf. [5]). An arbitrary element A of G is of the form

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A} & O \\ A' & E \end{pmatrix}$$

¹ Mr. J. L. BRENNER has obtained similar results (unpublished).

where $\bar{A}$ belongs to $SL(N(A), \mathfrak{F})$. Therefore there exists a matrix B in G' such that

$$AB = \begin{pmatrix} E_N & O \\ A'' & E \end{pmatrix}$$

where E_N is the unit matrix of degree $N = N(A)$. Thus without loss of generality we may assume that A itself has 1's all along the main diagonal and only zeros above.

Now for $k = 1, 2, \dots, N(A)$ let A_k be the matrix which differs from the unit matrix in the k -th column only where it coincides with the k -th column of A . Then it is easy to verify that $A = A_1 A_2 \dots A_N$. It is sufficient, therefore, to show that G' contains all matrices which differ from the unit matrix in one column only where they may have arbitrary entries below the main diagonal. The method of constructing such a matrix from the $E_{ij}(x)$ and their conjugates will be made sufficiently clear by considering the case of the first column.

Suppose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots \\ a_{31} & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Then

$$A E_{21}(1 - a_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ a_{31} & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = A^*, \text{ say.}$$

Now define

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{31} & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{41} & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Then an easy calculation shows that

$$A^* = T E_{21}(1) T^{-1}$$

so that

$$A = (T E_{21}(1) T^{-1}) E_{21}^{-1}(1 - a_{21})$$

which belongs to G' . Hence $G' = G$.

(2) We note now that the $E_{ij}(x)$ are all conjugate to one another in G . The proof is almost literally the same as that given by DICKSON in his book "Linear Groups" [6] for the corresponding fact in the Special Linear group $SL(N, \mathfrak{F})$ with $N \geq 3$ and can be left to the reader. (The special circumstances of imperfect fields of characteristic 2 do not arise in our context.)

(3) In order to complete the proof it remains to show that if A is any element of G , distinct from E , then the normal closure $\{A\}^G$ of A in G contains at least one of the matrices $E_{ij}(x)$.

Since $A \neq E$, A can be partitioned in the form

$$A = \begin{pmatrix} B_n & O \\ C & E \end{pmatrix}$$

where $B_n \neq E_n$ is an $n \times n$ matrix, with $n > 1$. Now $G(\mathfrak{F})$ contains all similarly partitioned matrices

$$H = \begin{pmatrix} E_n & O \\ U & E \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad K = \begin{pmatrix} V_n & O \\ O & E \end{pmatrix}, \quad |V_n| = 1.$$

Therefore $\{A\}^G$ contains the matrices $A_1 = A^{-1} \cdot H^{-1} A H$ and $A_2 = A_1^{-1} \cdot K^{-1} A_1 K$. A short calculation which we omit yields

$$A_2 = \begin{pmatrix} E_n & O \\ W & E \end{pmatrix}, \quad W = U(E_n - B_n)(V_n - E_n).$$

If we now chose U so that its first row contains a 1 at a suitable place and zero's elsewhere and then chose K suitably as a matrix $E_{pq}(1)$ we can achieve (since $E_n - B_n \neq 0$) that W contains one and only one element distinct from zero. But that means that A_2 is a matrix $E_{ij}(x)$. This completes the proof of the theorem.

(4) Remark. The group G contains as a subgroup G^* all the matrices of the form

$$\begin{pmatrix} A^* & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

where A^* is an arbitrary finite matrix of determinant 1. G^* also is a simple group. This result can be established in a similar manner, but it is almost obvious, because G^* is "almost", i.e. apart from subgroups of the centres, the direct limit of a sequence of simple groups $PSL(n, \mathfrak{F})$, $n = 1, 2, \dots$, ordered by inclusion, and hence simple.

Literature.

- [1] HIGMAN, G., B. H. NEUMANN and HANNA NEUMANN: J. London Math. Soc. **24**, 247—254 (1949). — [2] HIGMAN, G.: J. London Math. Soc. **26**, 61—64 (1951). — [3] CHEHATA, C. G.: Proc. London Math. Soc. (3) **2**, 183—197 (1952). — [4] CAMM, RUTH: J. London Math. Soc. **28**, 65—76 (1952). — [5] WAERDEN, B. L. v. d.: Gruppen von linearen Transformationen, S. 6. Berlin 1935. — [6] DICKSON, L. E.: Linear Groups, S. 84—85. Leipzig 1901.

Queen Mary College, University of London.

(Eingegangen am 28. Juli 1952.)

Lineare additive Polyederfunktionale und Zerlegungsgleichheit.

Von

H. HADWIGER.

Sucht man bewegungsinvariante additive Funktionale k -dimensionaler Polyeder, welche für Zylinderpolyeder (Erklärung in Abschn. 2) verschwinden, so stellt sich heraus, daß es sich genau um die linearen Funktionale¹⁾ handelt. Im Falle des gewöhnlichen Raumes wurde die Existenz solcher Funktionale mit Verwendung des Auswahlaxioms nachgewiesen²⁾. Im Laufe der vorliegenden Arbeit wird sich zeigen, daß in Räumen gerader Dimension keine derartigen linearen nichttrivialen Funktionale existieren können, selbst dann nicht, wenn man die Forderung der Invarianz gegenüber Bewegungen dadurch stark mildert, daß man nur noch die Invarianz gegenüber Translationen und Inversion verlangt. Das Fehlen solcher Funktionale im Falle der Ebene hängt aufs engste mit dem bekannten Sachverhalt zusammen, wonach inhaltsgleiche Polygone stets zerlegungsgleich sind; und zwar reichen zur Realisierung der ebenen Zerlegungsgleichheit, wie unseres Wissens erst kürzlich festgestellt wurde³⁾, bereits die Translationen und die Inversion aus. Im gewöhnlichen Raume sind dagegen inhaltsgleiche Polyeder nach dem klassischen DEHNschen Satz⁴⁾ nicht notwendig zerlegungsgleich. Allgemeiner wird in dieser Arbeit belegt, daß die Zerlegungsverhältnisse in Räumen gerader Dimension stets günstiger liegen, insofern nämlich, als jedes geraddimensionale

¹⁾ Das Funktional des dilatierten Polyeders multipliziert sich mit dem Dilatationskoeffizienten. Um zu zeigen, daß ein für Zylinderpolyeder verschwindendes Funktional linear ist, braucht es noch eine schwache zusätzliche Voraussetzung. Beispielsweise genügt es, zu verlangen, daß das Funktional dilatationsstetig ist.

²⁾ HADWIGER, H.: Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionale. *Comm. Math. Helv.* **24**, 204—218 (1950). Es wird dort unter anderem gezeigt, daß die Übereinstimmung der Funktionale dieser Art notwendig und hinreichend dafür ist, daß zwei Polyeder zerlegungsgleich mod W sind, d.h. zerlegungsgleich bis auf Reste, die mit einem Würfel zerlegungsgleich ausfallen. Sind die beiden Polyeder zusätzlich noch volumgleich, so sind sie überhaupt zerlegungsgleich. Dieser Tatbestand wurde bereits vor einigen Jahren durch B. JESSEN (*En Bemaerkning om Polyedres Volumen*, *Mat. Tidskr. B* 1941, 59—65) erkannt. Die JESSENSchen Volumina sind bewegungsinvariante und additive Polyederfunktionale, welche sich für Zylinderpolyeder auf den elementaren Inhalt reduzieren. Differenzen JESSENScher Volumina sind demnach Funktionale, die für Zylinderpolyeder verschwinden. Die hier betrachteten linearen Funktionale sind in dieser allgemeineren Mannigfaltigkeit enthalten. Die anderen nicht linearen Funktionale verhalten sich bezüglich der Dilatation total unstetig (vgl. auch Bemerkung in Fußnote 1).

³⁾ HADWIGER, H., u. P. GLUR: Zerlegungsgleichheit ebener Polygone. *Elemente Math.* **6**, 97—106 (1951).

⁴⁾ DEHN, M.: Über den Rauminhalt. *Math. Ann.* **55**, 465—478 (1901).

Polyeder mit einem Zylinderpolyeder zerlegungsgleich ist, und zwar bezüglich der durch die Translationen und die Inversion erzeugten Bewegungsgruppe.

Unsere Hauptergebnisse beziehen sich indessen auf lineare additive Funktionale k -dimensionaler Polyeder, die gegenüber den Bewegungen einer an sich beliebigen, die Translationen enthaltenden Gruppe invariant sind. Die Übereinstimmung aller Funktionalwerte dieser Art für zwei Polyeder erweist sich als notwendig und hinreichend dafür, daß die beiden Polyeder bezüglich der genannten Gruppe zerlegungsgleich mod Z , d.h. zerlegungsgleich bis auf zylindrische Reste sind⁵⁾.

In Räumen gerader Dimension sind zwei beliebige Polyeder zerlegungsgleich mod Z bezüglich der durch Translationen und Inversion erzeugten Bewegungsgruppe.

1. Bewegungsgruppe und Zerlegungsgleichheit der Polyeder.

Es sei G eine *Bewegungsgruppe* im k -dimensionalen euklidischen Raum R , welche die Translationen enthält, so daß die *Translationsgruppe* T eine Untergruppe von G ist. Ist D die in G enthaltene *Drehgruppe*, die aus den Operationen von G besteht, welche den Ursprung des Raumes R fest lassen, so kann symbolisch $G = (D, T)$ geschrieben werden. Besonders ausgezeichnete Gruppen sind dann $T = (E, T)$ und $G_0 = (D_0, T)$; hierbei bezeichnen E die Ruhe (Einselement) und D_0 die volle k -dimensionale Drehgruppe, also G_0 die volle Bewegungsgruppe in R . In Räumen gerader Dimension soll noch die Gruppe $\hat{T} = (\hat{D}, T)$ erwähnt werden, deren Drehteil $\hat{D}$ aus den beiden Operationen I und $I^2 = E$ besteht, wo I die Inversion oder Spiegelung am Ursprung des Raumes R bezeichnet.

$A, B, C, \dots$ sollen abgeschlossene eigentliche⁶⁾ *Polyeder* von R bedeuten. Unter $A + B$ soll wie üblich ein Polyeder verstanden werden, das sich im Sinne der Elementargeometrie in die beiden Polyeder A und B zerlegen läßt, so daß A und B keine inneren Punkte gemeinsam haben. Alle im folgenden vorkommenden Polyederadditionen sind stets stillschweigend an diese Konvention gebunden. Innerhalb der Zerlegungstheorie bezüglich einer Bewegungsgruppe G der vorstehend beschriebenen Art sind Polyeder, die durch Translation auseinander hervorgehen, gleichwertig, da T in jedem G enthalten ist. Wir treffen daher die einmalige Verabredung, daß bei allen Polyederadditionen überhaupt eine geeignete Verschiebung der beteiligten Polyeder so vorgekehrt wird, daß der oben erwähnten Konvention genügt wird.

Ist α eine Bewegung der Gruppe G , so soll α das Polyeder A in A^α überführen. Gibt es ein $\alpha \in G$, so daß $A^\alpha = B$ ausfällt, so heißen A und B *G-gleich*, symbolisch durch $A \simeq B$ ausgedrückt. Insbesondere bedeuten T -gleich *translationsgleich* und G_0 -gleich *kongruent*.

⁵⁾ Vgl. auch die Angaben in Fußnote 2 betreffend den dreidimensionalen Fall und beachte, daß ein gewöhnliches Zylinderpolyeder mit einem Würfel zerlegungsgleich ist.

⁶⁾ Ein eigentliches Polyeder ist die Vereinigungsmenge endlich vieler k -dimensionaler abgeschlossener und nicht entarteter Simplexe, welche keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Zwei Polyeder A und B nennen wir *G-zerlegungsgleich*, symbolisch durch $A \sim B$ ausgedrückt, wenn sie sich in paarweise *G-gleiche* Teilpolyeder zerlegen lassen, so daß also $A = \sum_1^n A_v$ und $B = \sum_1^n B_v$ gilt, wobei $A_v \simeq B_v$ ($v = 1, 2, \dots, n$) ist. Insbesondere unterscheiden wir *T-zerlegungsgleich* oder *translativ-zerlegungsgleich* und *G₀-zerlegungsgleich* oder *zerlegungsgleich*.

Alle hier genannten Relationen zwischen Polyedern sind *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv*. Wie erst kürzlich in der hier erforderlichen Allgemeinheit bewiesen wurde⁷⁾, gilt der Satz von der *G-Ergänzungsgleichheit*, wonach aus $A + C \sim B + D$ und $C \sim D$ die Folgerung $A \sim B$ gezogen werden kann.

Für eine natürliche Zahl n bedeute $n \cdot A$ ein Polyeder, das sich in n Teilpolyeder zerlegen läßt, die alle mit A *G-zerlegungsgleich* sind. Es gilt dann ferner der Satz von der *G-Selbstergänzungsgleichheit*⁸⁾, wonach aus $n \cdot A \sim n \cdot B$ auf $A \sim B$ geschlossen werden kann.

Im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wird noch die *MINKOWSKISCHE Addition* zweier Polyeder A und B , die wir symbolisch mit $A \times B$ bezeichnen, Verwendung finden. Ferner brauchen wir wesentlich den Begriff der *Dilatation* mit λ , die ein Polyeder A in das zu A homothetische Polyeder λA überführen soll; hierbei ist $\lambda > 0$.

2. Zylinderpolyeder und Zerlegungsgleichheit mod Z .

Ein Polyeder A wollen wir einen *i-stufigen Zylinder* nennen, wenn eine Darstellung der Form $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i$ als *i-fache MINKOWSKISCHE Summe* möglich ist; hierbei soll A_v ($v = 1, 2, \dots, i$) ein k_v -dimensionales Polyeder darstellen, das also in einem k_v -dimensionalen Unterraum von R liegt, es soll $k_v \geq 1$ und $k_1 + k_2 + \dots + k_i = k$ sein und weiter sollen die Trägerräume der Polyeder A_v den ganzen k -dimensionalen Raum aufspannen. Die Stufenzahl i stellt einen Grad zylindrischer Entartung dar, offenbar gilt $1 \leq i \leq k$. Bei den 1-stufigen Zylindern ist offenbar keinerlei Entartung vorausgesetzt; sie sind beliebige Polyeder. Dagegen ist ein k -stufiger Zylinder (höchste Entartung) ein Parallelotopaggregat⁹⁾.

Ein Polyeder, das sich in endlich viele *i-stufige Zylinder* zerlegen läßt, nennen wir ein *i-stufiges Zylinderpolyeder*. Ist hier $i > 1$, so sprechen wir von einem *eigentlichen Zylinderpolyeder*; zur Benennung eines solchen verwenden wir fortab die Zeichen $U, V, W, \dots, Z$.

In weiterer Verfolgung einer für gewöhnliche Polyeder von J.P. SYDLER¹⁰⁾ verwerteten Idee hat der Verfasser kürzlich einen sich auf die Translations-

⁷⁾ HADWIGER, H.: Ergänzungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder. Math. Z. **55**, 292—298 (1952).

⁸⁾ loc. cit. ⁷⁾.

⁹⁾ Dieser auf der MINKOWSKISCHEN Addition beruhende Zylinderbegriff wurde vom Verf. in der in Fußnote 7 zitierten Arbeit eingeführt. Es zeigte sich, daß die nach der Stufenzahl vorgenommene Klassifikation induktive Beweiskonstruktionen ermöglicht, wobei man von Zylindern hoher Stufe zu solchen niedrigerer Stufe fortschreitet.

¹⁰⁾ SYDLER, J. P.: Sur la décomposition des polyèdres. Comm. Math. Helv. **16**, 266—273 (1943/44).

gruppe T beziehenden *Zerlegungshilfssatz für Zylinderpolyeder* aufgestellt¹¹⁾, nach dem für ein i -stufiges Zylinderpolyeder A die Zerlegungsformel $A \sim A' + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ gilt, wobei A' ein $(i+1)$ -stufiges Zylinderpolyeder bedeutet. Ist hier $i=k$, so ist A' leer und die Aussage gibt die triviale Tatsache wieder, daß ein k -dimensionales Parallelotop in n^k kleinere homothetische Parallelotope zerlegt werden kann, die aus dem ursprünglichen durch eine Dilatation mit $1/n$ hervorgehen.

Wir definieren nun weiter: Zwei Polyeder A und B heißen *G-zerlegungsgleich mod Z* , symbolisch durch $A \sim B \pmod{Z}$ ausgedrückt, wenn es zwei eigentliche Zylinderpolyeder U und V so gibt, daß $A + U \sim B + V$ ausfällt, d.h. A und B sind *G-zerlegungsgleich* bis auf eigentlich zylindrische Restpolyeder Z . Leicht bestätigt man, daß auch diese Verwandtschaft wieder *symmetrisch*, *reflexiv* und *transitiv* ist. Aus den im vorstehenden Abschnitt erwähnten Sätzen von der *G-Ergänzungsgleichheit* und der *G-Selbstergänzungsgleichheit* läßt sich weiter leicht ableiten, daß auch aus $A + C \sim B + D \pmod{Z}$ und $C \sim D \pmod{Z}$ auf $A \sim B \pmod{Z}$ und ebenso aus $n \cdot A \sim n \cdot B \pmod{Z}$ auf $A \sim B \pmod{Z}$ geschlossen werden kann.

Gibt es zwei eigentliche Zylinderpolyeder U und V , so daß $A + U \sim V$ ausfällt, so schreiben wir auch $A \sim 0 \pmod{Z}$, wo 0 ein Symbol für das leere Polyeder ist.

Es besteht die Möglichkeit, auf Grund der eben erwähnten gültigen Regeln innerhalb von Äquivalenzrelationen auch eine formale *Polyedersubtraktion* einzuführen, indem wir erklären, daß die Relation $A - B \sim C \pmod{Z}$ gleiche Bedeutung haben soll wie $A \sim B + C \pmod{Z}$. Eine Relation $-A \sim -B \pmod{Z}$ ist demnach auch gleichbedeutend mit $A \sim B \pmod{Z}$. Eine Dilatation mit λ war bisher an die Bedingung $\lambda > 0$ gebunden. Wir erklären hier eine solche mit einem beliebigen $-\infty < \lambda < \infty$, indem wir festlegen, daß $(-\lambda)A$ und $-(\lambda A)$ gleichbedeutend sein sollen. Ferner werde $0A$ mit dem leeren Polyeder 0 identifiziert.

Bezüglich der Dilatation gelten dann die folgenden drei *Distributivgesetze*:

1. $\alpha(A + B) \sim \alpha A + \alpha B \pmod{Z}; \quad -\infty < \alpha < \infty,$
2. $(\alpha + \beta)A \sim \alpha A + \beta A \pmod{Z}; \quad -\infty < \alpha, \beta < \infty,$
3. $(\alpha\beta)A \sim \alpha(\beta A) \pmod{Z}; \quad -\infty < \alpha, \beta < \infty.$

Das erste ist trivial und das zweite folgt aus einer Zerlegungsmöglichkeit des k -dimensionalen Simplexes¹²⁾, wonach für $\alpha > 0$, $\beta > 0$ eine Zerlegung $(\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S + Z$ besteht. Eine solche gibt es demnach auch für ein beliebiges Polyeder A . Hieraus folgt das zweite Gesetz zunächst für $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Mit einigen zusätzlichen Betrachtungen ergibt sich leicht die Erweiterung auf beliebige α und β . Einfacher verifiziert man das dritte Gesetz.

¹¹⁾ loc. cit. 7).

¹²⁾ Eine solche wurde ausführlicher beschrieben in der Abhandlung des Verf.: Zur Inhaltstheorie der Polyeder. Collect. Math. 3, 137—158 (1950). Im Falle des gewöhnlichen Raumes vgl. auch J. P. SYDLER, loc. cit.¹⁰⁾.

3. Zerlegungsbasis mod Z .

In diesem Abschnitt wollen wir Polyeder, welche zerlegungsgleich mod Z sind, nicht als voneinander verschieden ansehen. Auf Grund der so festgesetzten Gleichheit bildet die Gesamtheit aller Polyeder einen linearen Raum. Man verifiziert leicht die Gültigkeit aller erforderlichen, sich auf die nun eindeutig erklärte Addition $A + B$, Subtraktion $A - B$ und skalare Multiplikation λA ($-\infty < \lambda < \infty$) beziehenden Gesetze, wenn man sich auf die im vorstehenden Abschnitt entwickelten Regeln stützt.

Nach der bekannten Konstruktion von G. HAMEL¹³⁾ läßt sich mit Verwendung des Wohlordnungssatzes eine Menge von Basispolyedern gewinnen, so daß sich jedes beliebige Polyeder auf genau eine Weise durch endlich viele passend ausgewählte Basispolyeder linear darstellen läßt¹⁴⁾.

Diesen Tatbestand drücken wir ausführlicher wie folgt aus:

Es existiert eine Menge von Basispolyedern T_τ , wobei τ einen abstrakten Index darstellt, der die verschiedenen Polyeder T der Basis individuiert¹⁵⁾, so daß für jedes beliebige Polyeder A eine und nur eine Relation der Form

$$(1) \quad A \sim \sum_{\tau} p_{\tau} T_{\tau} \pmod{Z}$$

besteht in dem Sinne, daß der Koeffizient p_{τ} für jedes τ eindeutig durch A bestimmt ist. Die Summation erstreckt sich über alle τ , reduziert sich aber in jedem individuellen Fall auf eine endliche Summe, da die Koeffizienten für ein festes Polyeder A für fast alle τ verschwinden.

Die Polyeder T_{τ} bilden eine Zerlegungsbasis mod Z . Bezüglich der Koeffizienten in der Darstellung (1) gilt folgendes:

Bei festem Index τ bildet der Koeffizient $p_{\tau} = p_{\tau}(A)$ ein eindeutig definiertes Polyederfunktional, das G -invariant, additiv und linear ist, so daß also die Beziehungen

$$(2) \quad p_{\tau}(A) = p_{\tau}(B), \quad A \simeq B; \quad p_{\tau}(A + B) = p_{\tau}(A) + p_{\tau}(B); \quad p_{\tau}(\lambda A) = \lambda p_{\tau}(A)$$

gelten, und das für jedes eigentliche Zylinderpolyeder Z verschwindet, so daß

$$(3) \quad p_{\tau}(Z) = 0$$

wird.

¹³⁾ HAMEL, G.: Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Math. Ann. **60**, 459—462 (1905).

¹⁴⁾ In der in Fußnote 2 zitierten Arbeit hat der Verf. bezüglich einer gleichwertigen Polyederäquivalenz im gewöhnlichen Raum die Beweiskonstruktion ausführlicher dargestellt, so daß wir uns hier mit dem kurzen Hinweis begnügen können.

¹⁵⁾ Über die Mächtigkeit der Basispolyedermenge läßt sich hier nicht viel sagen; die sich bietenden Verhältnisse sind von der Dimension k des Raumes R und vor allem auch von der zugrunde gelegten Bewegungsgruppe G stark abhängig. Ist z.B. $k = 1$, so daß gar keine eigentlichen Zylinderpolyeder existieren, so bildet ein beliebiges lineares Simplex (Strecke) bereits eine Basis. Ist $k = 2$ und wählen wir die durch Translationen und Inversion erzeugte Bewegungsgruppe T , so ist die Basis leer, da für jedes ebene Polygon P die Relation $P \sim 0 \pmod{Z}$ gilt. Wird im ebenen Fall dagegen die Translationsgruppe gewählt, so ergibt sich eine kontinuierliche Basis. Als Basispolygone können beispielsweise die rechtwinkligen Dreiecke T_{τ} : $[x \geq 0; y \geq 0; x/\cos \tau + y/\sin \tau \leq 1]$ ($0 < \tau < \pi/2$) gewählt werden, wobei wie ersichtlich der kontinuierliche Index τ die Richtung der Hypotenuse anzeigt.

4. *G*-invariante, additive und lineare Polyederfunktionale.

In diesem Abschnitt wenden wir uns in unabhängiger und allgemeiner Weise einigen Studien über Funktionale zu, welche von der Art der im vorstehenden Abschnitt gewonnenen Koeffizientenfunktionale sind.

Es sei $\varphi(A)$ ein für alle Polyeder A des Raumes R eindeutig definiertes Funktional mit den nachfolgenden Eigenschaften:

$$(I) \quad \varphi(A) = \varphi(B) \quad \text{falls } A \simeq B \text{ ist;}$$

$$(II) \quad \varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B);$$

$$(III) \quad \varphi(\lambda A) = \lambda \varphi(A).$$

Es handelt sich also um ein *G*-invariantes, additives und lineares Polyederfunktional. Zunächst zeigen wir, daß aus diesen drei Eigenschaften bereits folgt, daß das Funktional für Zylinderpolyeder verschwinden muß. Es gilt also:

*Ist $\varphi(A)$ ein *G*-invariantes, additives und lineares Polyederfunktional, so muß für jedes eigentliche Zylinderpolyeder Z*

$$(4) \quad \varphi(Z) = 0$$

sein.

In der Tat: Ist $k = 1$, so muß nichts bewiesen werden, da keine eigentlichen Zylinderpolyeder existieren. Es sei also $k > 1$. Ist Z ein Parallelotop, so gilt eine Zerlegung $Z \sim n^k \cdot \frac{1}{n} Z$, so daß zunächst mit (I) und (II) auf $\varphi(Z) = n^k \varphi\left(\frac{1}{n} Z\right)$ und dann mit (III) weiter auf $\varphi(Z) = n^{k-1} \varphi(Z)$ und mit $n > 1$ auf $\varphi(Z) = 0$ geschlossen wird. Wir nehmen nun an, daß die zu beweisende Aussage bereits für alle i -stufigen ($2 < i \leq k$) Zylinderpolyeder sichergestellt sei, und nun sei Z ein $(i-1)$ -stufiges Zylinderpolyeder. Nach dem im 2. Abschnitt erklärten Zerlegungshilfssatz gilt eine Zerlegung $Z \sim Z' \vdash n^{i-1} \cdot \frac{1}{n} Z$, wobei Z' ein i -stufiges Zylinderpolyeder darstellt. Analog wie weiter oben schließen wir mit Rücksicht auch auf die induktive Voraussetzung $\varphi(Z) = n^{i-2} \varphi(Z)$, so daß wegen $i-2 > 0$ mit $n > 1$ auf $\varphi(Z) = 0$ geschlossen werden kann, w. z. b. w.

Nun ergibt sich mühelos die Bedeutung der hier betrachteten Funktionale für die Zerlegungsgleichheit mod Z . Es gilt nämlich der folgende Satz:

*Für zwei Polyeder A und B gilt dann und nur dann $A \sim B \pmod{Z}$, wenn für alle *G*-invarianten additiven und linearen Polyederfunktionale*

$$(5) \quad \varphi(A) = \varphi(B)$$

ausfällt; diese Bedingungen sind demnach notwendig und hinreichend für die Zerlegungsgleichheit mod Z .

Der Beweis ist kurz: Aus (5) folgt mit Rücksicht auf (2) insbesondere $\varphi_\tau(A) = \varphi_\tau(B)$ für alle τ und hieraus ergibt sich mit (1) weiter $A \sim B \pmod{Z}$. Ist umgekehrt $A \sim B \pmod{Z}$ vorausgesetzt, so gilt nach Definition $A + U \sim B + V$, wo U und V eigentliche Zylinderpolyeder bezeichnen. Mit Rücksicht auf (4) muß $\varphi(U) = \varphi(V) = 0$ sein, und so ergibt sich mit (I) und (II) mühelos (5), w. z. b. w.

5. Das Darstellungsproblem.

Die im vorstehenden Abschnitt gewonnenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die G -Zerlegungsgleichheit mod Z stellen insofern nur eine formale Lösung des Zerlegungsproblems dar, als die zuständigen G -invarianten, additiven und linearen Polyederfunktionale nur implizite durch ihre Eigenschaften (I), (II) und (III) gegeben sind. Ein effektives Kriterium, das in jedem individuellen Fall zweier Polyeder A und B die Frage, ob $A \sim B \pmod{Z}$ gilt oder nicht, zu entscheiden gestattet, setzt voraus, daß die explizite Darstellung aller Funktionalen dieser Art zur Verfügung steht.

Eine weitere Förderung des Zerlegungsproblems ist durch Angabe solcher Darstellungen zu erreichen. Unserer Entwicklung etwas vorgreifend wollen wir gleich erwähnen, daß im 7. Abschnitt eine rekursive Lösung des Darstellungsproblems für den Fall der Translationsgruppe T gegeben wird. Damit ist eo ipso das Problem der translativen Zerlegungsgleichheit mod Z vollständig gelöst. Im 6. Abschnitt wird für den allgemeinen Fall einer Bewegungsgruppe $G = (D, T)$ eine Reduktion auf den translationsinvarianten Fall gegeben, welche aber im wesentlichen noch formal bleibt und nur in besonderen Fällen eine explizite Lösung des Darstellungsproblems erlaubt. Eine solche wird durch diese Reduktion dann erzielt, wenn der Drehteil D von G eine endliche Gruppe ist, also beispielsweise im Falle der durch Inversion und Translationen erzeugten Gruppe $\hat{T}$ in Räumen gerader Dimension. Wenn der Drehteil nicht endlich ist, also wie etwa im besonders wichtigen Fall der vollen Bewegungsgruppe G_0 , bleibt das Darstellungsproblem noch ungelöst. Hier konnten nur spezielle Darstellungen gefunden werden¹⁶⁾, wobei noch nicht bewiesen werden konnte, daß damit alle Funktionalen erfaßt werden. So gibt es im bewegungsinvarianten Fall bisher nur notwendige Kriterien, von denen man nicht weiß, ob sie auch hinreichen.

6. Formale Reduktion auf den translationsinvarianten Fall.

Es bezeichne $\mathfrak{M}_G$ die Mannigfaltigkeit aller G -invarianten, additiven und linearen Polyederfunktionale. Denken wir uns, daß die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_T$ der entsprechenden translationsinvarianten Polyederfunktionale hinlänglich bekannt sei und daß man $\mathfrak{M}_G$ suche, wo $G = (D, T)$ eine allgemeinere Bewegungsgruppe ist. Im folgenden zeigen wir, wie man die Funktionalen $\varphi \in \mathfrak{M}_G$ formal aus den Funktionalen $\psi \in \mathfrak{M}_T$ gewinnen kann. Es bezeichne $\bar{\mathfrak{M}}_T$ die Teilmannigfaltigkeit derjenigen Funktionalen $\bar{\psi}$ von $\mathfrak{M}_T$, die über der Drehgruppe D einen *Integralmittelwert* $m_\delta[\bar{\psi}(A^\delta)]$ ($\delta \in D$) im Sinne von J. VON NEUMANN¹⁷⁾ aufweisen, der für alle Polyeder A existiert.

¹⁶⁾ Vortrag des Verf. „Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder“ am Internationalen Mathematikertreffen in Salzburg im September 1951. Für gewöhnliche Polyeder vgl. auch H. HADWIGER, Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder. Arch. Math. 2, 441—444 (1949/50).

¹⁷⁾ NEUMANN, J. V.: Almost periodic functions in a group. I. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 445—492 (1934). Eine vollständige Darstellung der Mittelwertstheorie gibt W. MAAK in seinem neuen Buch: „Fastperiodische Funktionen“, §§ 9—12. Berlin: Springer 1950.

Es gilt nun der folgende Satz:

Durch den Ansatz

$$(6) \quad \varphi(A) = m_\delta[\bar{\psi}(A^\delta)] \quad (\delta \in D)$$

ergibt sich die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_G$ der G -invarianten Funktionale φ aus der Teilmannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}_T$ der T -invarianten Funktionale $\bar{\psi}$.

In der Tat: Aus $\bar{\psi} \in \overline{\mathfrak{M}}_T$ folgt mit einigen einfachen Schlüssen aus den Grundeigenschaften des Integralmittelwertes, daß $\varphi \in \mathfrak{M}_G$ gilt. Ist umgekehrt $\varphi \in \mathfrak{M}_G$ vorgegeben, so gibt es sicher ein $\bar{\psi} \in \overline{\mathfrak{M}}_T$, so daß die Integraldarstellung (6) gilt; es genügt nämlich $\bar{\psi} = \varphi$ zu wählen, was sicher angeht, da doch $\varphi \in \mathfrak{M}_T$ gilt. Die Darstellung (6) ist in diesem Fall natürlich völlig trivial. Es wäre aber voreilig, hieraus schließen zu wollen, daß die mit diesem einfachen Schluß bewiesene zweite Hälfte unseres Satzes keinen Beitrag zur Lösung des Darstellungsproblems zu leisten imstande sei, da erstens auch andere Funktionale $\bar{\psi}$ das nämliche φ ergeben können und da zweitens für φ T -invariante Darstellungen als $\bar{\psi}$ in Frage kommen, welche die G -Invarianz noch gar nicht erkennen lassen.

Die durch (6) erzielte Reduktion auf den translationsinvarianten Fall ist nur formal, da eine Aussonderung der translationsinvarianten Funktionale mit NEUMANN'Schem Mittelwert über der Drehgruppe vorgeschrieben wird, ohne daß eine Handhabe zur effektiven Ausführung gegeben werden kann. Die Lösung dieser Aufgabe ist vielleicht nicht einfacher als die direkte Aussonderung der G -invarianten Funktionale.

Günstig gestalten sich die Verhältnisse aber dann, wenn $\overline{\mathfrak{M}}_T \equiv \mathfrak{M}_T$ ausfällt; dies ist dann der Fall, wenn die Drehgruppe D endliche Ordnung aufweist. Unser Satz (6) erfährt dann die folgende Modifikation:

Besitzt die Gruppe $G = (D, T)$ einen Drehteil D endlicher Ordnung und sind δ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) die Drehungen von D , so ergibt sich aus dem Ansatz

$$(7) \quad \varphi(A) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \psi(A^{\delta_\nu})$$

die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_G$ der G -invarianten Funktionale φ aus der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_T$ der T -invarianten Funktionale ψ .

Aus diesem Sachverhalt (7) ergibt sich im Hinblick auf das Kriterium (5) der folgende Satz¹⁸⁾:

Besitzt die Gruppe $G = (D, T)$ einen Drehteil D endlicher Ordnung, so besteht für zwei Polyeder A und B die Zerlegungsrelation $A \sim B \pmod{Z}$ bezüglich G dann und nur dann, wenn

$$(8) \quad \sum_{\nu=1}^n A^{\delta_\nu} \sim \sum_{\nu=1}^n B^{\delta_\nu} \pmod{Z}$$

bezüglich T gilt, wobei δ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) die Drehungen von D bezeichnen.

¹⁸⁾ Dieser kann übrigens auch mit Bezugnahme auf den im 1. Abschnitt erwähnten Satz von der G -Selbstergänzungsgleichheit direkt bewiesen werden.

Durch diese Aussage ist das Problem der Zerlegungsgleichheit mod Z für eine Gruppe mit endlichem Drehteil reduziert auf dasjenige der translativen Zerlegungsgleichheit mod Z .

Im nachfolgenden Abschnitt wird dieses letztere Problem indessen vollständig gelöst.

7. Rekursive Darstellung im translationsinvarianten Fall.

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß sich die translationsinvarianten additiven und linearen Funktionale ψ k -dimensionaler Polyeder durch die analogen Funktionale ψ' $(k-1)$ -dimensionaler Polyeder darstellen lassen, falls $k > 1$ ist. Damit wird die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_T$ rekursiv aus der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'_T$ für niedrigere Dimension gewonnen. Da die Funktionale im 1-dimensionalen Fall trivial sind — offenbar gilt $\psi(A) = c L(A)$, wobei $L(A)$ die totale Länge (Inhalt) des linearen Polyeders bezeichnet — ist damit das Darstellungsproblem vollständig gelöst.

Wir beweisen den folgenden Satz:

Durch den Ansatz

$$(9) \quad \psi(A) = \sum_u \chi(u) \psi'_u(A'_u)$$

ergibt sich die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_T$ der Funktionale ψ für k -dimensionale Polyeder für $k > 1$ rekursiv aus der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'_T$ der Funktionale ψ' für $(k-1)$ -dimensionale Polyeder. Hierbei bezeichnen u einen Richtungsvektor im R_k und A'_u das $(k-1)$ -dimensionale Polyeder, das aus denjenigen Randflächen von A besteht, die einen nach außen weisenden zu u parallelen Normalenvektor besitzen. Ferner sei $\psi'_u(A') = \psi'_{-u}(A')$ ein Funktional in dem auf u orthogonal stehenden R_{k-1} und endlich bedeute $\chi(u)$ eine bis auf die Bedingung $\chi(u) = -\chi(-u)$ willkürlich wählbare ungerade Richtungsfunktion.

Für $k=1$ gilt $\psi(A) = c L(A)$.

Die Summation in (9) erstreckt sich über die kontinuierlich vielen Richtungen u , reduziert sich aber in jedem individuellen Fall eines Polyeders A naturgemäß auf eine endliche Summe, da die Funktionalwerte $\psi'_u(A'_u)$ für fast alle u verschwinden. Man beachte ferner, daß die Funktionale ψ'_u für jedes Richtungs paar $u, -u$ individuell aus der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'_T$ auswählbar sind.

Beweis. Die Einsicht, daß jedes durch Ansatz (9) konstruierte Funktional ψ zu $\mathfrak{M}_T$ gehört, ergibt sich mit einigen wenigen Überlegungen. Translationsinvarianz und Linearität von ψ schließt man trivial aus den nämlichen Eigenschaften von ψ' . Die Additivität von ψ ergibt sich aus derjenigen von ψ' in Verbindung mit der Bemerkung, daß für jede Richtung u $\chi(u) \psi'_u(A) + \chi(-u) \psi'_{-u}(A') = 0$ gilt. Wir haben nun zu zeigen, daß sich umgekehrt jedes Funktional $\psi \in \mathfrak{M}_T$ in der Form (9) darstellen läßt. Es sei also $\psi \in \mathfrak{M}_T$ vorgegeben. Wir wählen einen festen auf u_0 orthogonal stehenden Raum R_{k-1}^0 als „Basisebene“ und setzen willkürlich fest, daß $\psi'_u(A') = 0$ sei für jede Richtung u , für die $(u, u_0) = 0$ gilt. Es sei weiter u eine feste Richtung und

$(u, u_0) > 0$. Wir betrachten nun gerade zylindrische Säulen S_u mit $(k-1)$ -dimensionalen in der Basisebene liegenden Grundflächen P'_{u_0} und parallelen Deckflächen Q'_u , deren nach außen weisenden Normalenvektoren mit u gleichgerichtet sind. Da für ein Zylinderpolyeder Z nach (4) $\psi(Z) = 0$ ist, folgt, daß $\psi(S_u)$ nicht von der Höhe der Säule abhängig ist und sich demnach als Funktional $\psi'_u(Q'_u)$ des Deckflächenpolyeders auffassen läßt. Mit einigen einfachen Überlegungen ergibt sich, daß $\psi'_u(A') \in \mathfrak{M}'_T$ gilt und daß insbesondere $\psi'_{u_0}(A') = 0$ ist. Mit der in (9) vorgeschriebenen Festsetzung $\psi'_u(A') - \psi'_{-u}(A')$ sind so die individuell wählbaren Funktionale $\psi'_u(A')$ für alle Richtungen eindeutig konstruiert. Nach der am Anfang dieses Beweises erwähnten Verifikation gilt für das mit Ansatz (9) auf Grund der soeben konstruierten Funktionale ψ' gebildete Funktional — wir wollen dieses zunächst mit $\psi^*(A)$ bezeichnen — gewiß $\psi^* \in \mathfrak{M}_T$. Nun ist aber $\psi^*(S_u) = \psi(S_u)$ für alle säulenförmigen Polyeder wie sie oben betrachtet wurden. Weiter läßt sich ein beliebiges Polyeder A , das in demjenigen durch die Basisebene begrenzten Halbraum von R_k liegt, in den u_0 weist, als Summe und Differenz von Säulen S_u darstellen. Mit Diskussion der richtigen Vorzeichen ergibt sich so $\psi^*(A) = \psi(A)$, womit sich der Beweis schließt.

8. Besondere Verhältnisse in Räumen gerader und ungerader Dimension.

Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz:

Bezeichnet $\hat{A}$ das durch Inversion (Spiegelung am Ursprung) aus A hervorgehende Polyeder des k -dimensionalen Raumes, so gilt für ein translationsinvariantes, additives und lineares Polyederfunktional ψ die Beziehung

$$(10) \quad \psi(\hat{A}) = (-1)^{k-1} \psi(A).$$

Der Beweis ergibt sich induktiv aus der rekursiven Darstellung (9). Für $k = 1$ ist (10) trivial, da wie im vorausgehenden Abschnitt bereits bemerkt $\psi(A) = c L(A)$ ist. Wir nehmen an, unsere Behauptung sei bereits sichergestellt für die Dimensionen bis und mit $k-1$. Es sei nun A ein k -dimensionales Polyeder. Nach (9) gilt nun $\psi(\hat{A}) = \psi[I(A)] = \sum_u \chi(u) \psi'_u\{[I(A)]'_u\}$. Nun ist aber $[I(A)]'_u = I'(A'_{-u})$, wo I' die Inversion im $(k-1)$ -dimensionalen Trägerraum von A'_u bedeutet und im Hinblick auf die induktive Annahme resultiert $\psi(\hat{A}) = (-1)^{k-2} \sum_u \chi(u) \psi'_u(A'_{-u})$. Mit der Bemerkung, daß $\psi'_u(A') = \psi'_{-u}(A')$ und $\chi(u) = -\chi(-u)$ ist, ergibt sich so $\psi(\hat{A}) = (-1)^{k-1} \sum_u \chi(-u) \psi'_{-u}(A'_{-u})$. Da hier über alle Richtungen summiert wird, darf u durch $-u$ ersetzt werden, womit sich der Beweis schließt.

Nun ergeben sich die beiden folgenden Aussagen:

In Räumen ungerader Dimension k gilt für alle Polyeder A die Zerlegungsrelation

$$(11) \quad A \sim \hat{A} \pmod{Z}$$

bezüglich T , d.h. zwei zueinander zentralsymmetrische Polyeder sind stets *translativ zerlegungsgleich mod Z* .

In Räumen gerader Dimension k gilt für alle Polyeder A die Zerlegungsrelation

$$(12) \quad A \sim 0 \pmod{Z}$$

bezüglich $\hat{T}$, d.h. jedes Polyeder ist innerhalb der durch Inversion I und Translationen T erzeugten Gruppe mit einem eigentlichen Zylinderpolyeder zerlegungsgleich.

Das gleiche gilt natürlich erst recht, wenn die volle Bewegungsgruppe G_0 gewählt wird.

Beweise. Ist k ungerade, so folgt nach (10) $\psi(\hat{A}) = \psi(A)$ für alle ψ und somit nach (5) die Behauptung (11). Ist k gerade, so folgt analog zunächst $\psi(\hat{A}) = -\psi(A)$. Handelt es sich um ein Funktional ψ , das zusätzlich noch $\hat{T}$ -invariant vorausgesetzt ist, so resultiert $\psi(A) = 0$. Wieder mit (5) ergibt sich die Behauptung (12).

9. Ein Zerlegungssatz betreffend die MINKOWSKISCHE Addition konvexer Polyeder.

In diesem Abschnitt sollen A, B nunmehr konvexe Polyeder bezeichnen und $A \times B$ bedeute das sich aus A und B durch MINKOWSKISCHE Addition ergebende ebenfalls konvexe Polyeder. Es gilt dann der folgende Satz:

Für ein translationsinvariantes, additives und lineares Polyederfunktional ψ gilt das Additionstheorem

$$(13) \quad \psi(A \times B) = \psi(A) + \psi(B).$$

Dies folgt induktiv mühelos aus der rekursiven Darstellung (9) in Verbindung mit der sich aus der Definition der MINKOWSKISCHEN Linearkombination ergebenden Feststellung, daß $(A \times B'_u) = A'_u \times B'_u$ für jede Richtung u gilt. Offensichtlich ist unsere Behauptung (13) für $k=1$ trivial, da dort ja $A \times B \simeq A + B$ ausfällt.

Nach dem Kriterium (5) gewinnen wir so den folgenden Satz:

Für die MINKOWSKISCHE Summe $A \times B$ zweier konvexer Polyeder A und B gilt die Zerlegungsrelation

$$(14) \quad A \times B \sim A + B \pmod{Z}$$

bezüglich T .

Bern (Schweiz), Hochfeldstr. 31.

(Eingegangen am 25. September 1952.)

Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen.

Von

PAUL LORENZEN.

Nach dem KRULLschen Fundamentalsatz [1] sind die Integritätsbereiche I , die als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellbar sind, dadurch charakterisiert, daß sie ganz abgeschlossen sind. Die Darstellbarkeit von I als Durchschnitt von Bewertungsringen ist andererseits äquivalent [3] mit der Existenz einer Verbandsobergruppe V der multiplikativen Gruppe G des Quotientenkörpers K von I — wobei V der Bedingung genügen muß, daß der in V enthaltene Idealbereich H (der aus allen g.g.T. $a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ mit $a_v \in G$ besteht) ein homomorphes Bild des DEDEKINDschen Idealbereichs H_d von I ist.

Diese letztere Äquivalenz ergibt sich aus dem allgemeineren bereichstheoretischen [4] Satz, daß die Halbordnung jedes regulären Verbandsbereiches Konjunktion von zulässigen Ordnungen ist — wenn man hinzufügt, daß jede kommutative Verbandsgruppe trivialerweise regulär ist. Daher stehen zum Beweis des KRULLschen Fundamentalsatzes zwei Wege zur Verfügung: Man hat für einen ganz abgeschlossenen Integritätsbereich entweder eine Durchschnittsdarstellung durch Bewertungen oder eine Verbandsobergruppe zu konstruieren. Beide Beweismöglichkeiten sind für kommutative Gruppen durchgeführt — für nichtkommutative Gruppen und allgemeiner für Bereiche ist bisher jedoch nur der erste Weg gangbar.

Die vorliegende Arbeit stellt den zweiten Beweisgang auch im allgemeinen Falle dar. Spezialisiert man anschließend die allgemeine Methode auf die Teilbarkeit in kommutativen Körpern K , so ergibt sich folgendes. Zur Konstruktion einer Verbandsobergruppe braucht nur definiert zu werden, wann für beliebige Elemente a_μ, b_ν aus der multiplikativen Gruppe G von K gelten soll [5]

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m < b_1 \vee \dots \vee b_n$$

($<$ steht für „teilt“, $\wedge$ bezeichnet den g.g.T., $\vee$ das k.g.V.).

Für jeden ganz abgeschlossenen Integritätsbereich I erhält man eine Verbandsobergruppe von G , wenn man definiert

$$(1) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m < b_1 \vee \dots \vee b_n \longleftrightarrow 1 \in \sum_{\mathbf{x}} (a_1 b_1^{-1}, \dots, a_\mu b_\mu^{-1}, \dots, a_m b_n^{-1})^{\mathbf{x}}.$$

Für $n=1$, $b_1=b$ geht diese Definition über in die PRÜFERSche Definition der Ganzabhängigkeit von b von $(a_1, \dots, a_m)$

$$(2) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m < b \longleftrightarrow b^k + c_1 b^{k-1} + \dots + c_k = 0 \quad [c_x \in (a_1, \dots, a_m)^{\mathbf{x}}].$$

Daher stellt (1) eine zweckmäßige Ausdehnung des Begriffes der Ganzabhängigkeit dar.

§ 1.

B sei ein Bereich, d. h. eine Menge mit einer Halbordnung R — wir schreiben $a < b$ statt $a R b$ — und einer Halbgruppe G von Operatoren $x, y, \dots$

V_q sei ein Überidealbereich von B , d. h. ein minimaler distributiver Verbandsüberbereich von B .

Definiert man als q -zulässige Ordnungen von B diejenigen Ordnungen von B , die durch zulässige Ordnungen S von V_q

(d. h.

$$R \subset S$$

$$c S a, \quad c S b \rightarrow c S a \wedge b$$

$$a S c, \quad b S c \rightarrow a \vee b S c \quad \text{für } a, b, c \in V$$

induziert werden, so gilt¹⁾

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bigwedge_S a_1 \wedge \dots \wedge a_m S b_1 \vee \dots \vee b_n \longleftrightarrow \\ S \text{ } q\text{-zul. Ordnung} \quad \longleftrightarrow \bigvee_{x_1, \dots, x_l} a_1 \wedge \dots \wedge a_m R [\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_l^{\pm 1}]'_q b_1 \vee \dots \vee b_n, \end{array} \right.$$

wobei $R[\alpha_1, \dots, \alpha_l]_q$ für $\alpha_i = (c_{1i}, c_{2i})$ die minimale q -zulässige Halbordnung S von B ist, für die $c_{1i} S c_{2i}$ gilt, und $R[\alpha_1, \dots, \alpha_l]'_q$ die minimale Fortsetzung auf V_q ist.

Definiert man also

$$(1.2) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m <_{q_a} b_1 \vee \dots \vee b_n \longleftrightarrow \bigvee_{x_1, \dots, x_l} a_1 \wedge \dots \wedge a_m R [\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_l^{\pm 1}]'_q b_1 \vee \dots \vee b_n,$$

so wird hierdurch ein regulärer distributiver Verbandsbereich definiert. Diese Regularität und Distributivität soll im folgenden unabhängig von (1.1) bewiesen werden. Ist $a_1 \wedge \dots \wedge a_m <_{q_a} b_1 \vee \dots \vee b_n$ definiert, dann wird der Verbandsbereich V_{q_a} aus den Elementen

$$\mathfrak{A} = a_1 \vee \dots \vee a_m, \quad \mathfrak{B} = b_1 \vee \dots \vee b_n, \dots$$

mit

$$a_\mu = a_{\mu_1} \wedge a_{\mu_2} \wedge \dots \wedge a_{\mu_{r_\mu}}, \quad b_\nu = b_{\nu_1} \wedge b_{\nu_2} \wedge \dots \wedge b_{\nu_{s_\nu}}, \dots$$

konstruiert, indem gesetzt wird

$$(1.3) \quad \mathfrak{A} < \mathfrak{B} \longleftrightarrow \bigwedge_{\substack{\mu \\ 1 \leq k_p \leq s_p}} a_{\mu_1} \wedge \dots \wedge a_{\mu_{r_\mu}} <_{q_a} b_{1k_1} \vee \dots \vee b_{nk_n}.$$

Die Definition (1.3) liefert genau dann einen distributiven Verband — vgl. hierzu [5] — wenn gilt

$$(1.4) \quad a < a$$

$$(1.5) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m < b_1 \vee \dots \vee b_n \rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m \wedge a < b \vee b_1 \vee \dots \vee b_n$$

$$(1.6) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m < b_1 \vee \dots \vee b_n \rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_{\mu+1} \wedge a_\mu \wedge \dots < b_1 \vee \dots \vee b_{\nu+1} \vee b_\nu \vee \dots$$

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \wedge \dots \wedge a_m \wedge c < b_1 \vee \dots \vee b_n, \\ a_1 \wedge \dots \wedge a_m < c \vee b_1 \vee \dots \vee b_n \rightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_m < b_1 \vee \dots \vee b_n. \end{array} \right.$$

¹⁾ Wir schreiben $\bigwedge_x$ bzw. $\bigvee_x$ statt: für alle x bzw. für ein x .

Auf Grund von (1.2) ist (1.4) bis (1.6) trivialerweise erfüllt. Um (1.7) zu beweisen setzen wir

$$\alpha_\mu = (a_\mu, c) \quad \beta_\nu = (c, b_\nu).$$

Aus den Voraussetzungen

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \wedge c < b_1 \vee \dots \vee b_n, \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m < c \vee b_1 \vee \dots \vee b_n$$

folgt zunächst die Existenz von Paaren $\gamma_1, \dots, \gamma_l$, so daß

$$(1.8) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m \wedge c \quad R [\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_l^{\pm 1}]'_\varrho b_1 \vee \dots \vee b_n$$

$$(1.9) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m \quad R [\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_l^{\pm 1}]'_\varrho c \vee b_1 \vee \dots \vee b_n$$

gilt. Wegen

$$a_\mu \quad R [\alpha_\mu]_\varrho c,$$

also $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \quad R [\alpha_\mu]'_\varrho a_1 \wedge \dots \wedge a_m \wedge c$, folgt für jede Vorzeichenkombination $\delta_1, \dots, \delta_m \neq -1, \dots, -1$

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \quad R [\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_l^{\pm 1}, \alpha_1^{\delta_1}, \dots, \alpha_m^{\delta_m}]'_\varrho b_1 \vee \dots \vee b_n.$$

Ebenso folgt aus (1.9) für jede Vorzeichenkombination $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \neq -1, \dots, -1$

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \quad R [\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_l^{\pm 1}, \beta_1^{\varepsilon_1}, \dots, \beta_n^{\varepsilon_n}]'_\varrho b_1 \vee \dots \vee b_n.$$

Wegen

$$c \quad R [\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_m^{-1}]'_\varrho a_1 \wedge \dots \wedge a_m \wedge c \quad \text{und} \quad c \vee b_1 \vee \dots \vee b_n \quad R [\beta_1^{-1}, \dots, \beta_n^{-1}]'_\varrho c$$

folgt andererseits

$$c \quad R [\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_l^{\pm 1}, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_m^{-1}]'_\varrho b_1 \vee \dots \vee b_n$$

und

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \quad R [\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_l^{\pm 1}, \beta_1^{-1}, \dots, \beta_n^{-1}]'_\varrho c$$

d.h.

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \quad R [\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_l^{\pm 1}, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_m^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \beta_n^{-1}]'_\varrho b_1 \vee \dots \vee b_n.$$

Damit ist aus der Definition (1.2) bewiesen, daß V_{ϱ_a} ein distributiver Verbandsbereich ist, denn die noch fehlende Distributivität der Operatoren $x, y, \dots$ ergibt sich trivial mit Hilfe von

$$(1.10) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m <_{\varrho_a} b_1 \vee \dots \vee b_n \rightarrow x a_1 \wedge \dots \wedge x a_m <_{\varrho_a} x b_1 \vee \dots \vee x b_n.$$

Für V_{ϱ_a} soll jetzt die Regularität bewiesen werden, d.h.

$$(1.11) \quad x \mathfrak{A} \wedge y \mathfrak{B} < y \mathfrak{A} \vee x \mathfrak{B}.$$

Für $\mathfrak{A} = a_1 \vee \dots \vee a_m$, $\mathfrak{B} = b_1 \vee \dots \vee b_n$ reduziert sich (1.11) wegen der Distributivität auf

$$x a_\mu \wedge y b_\nu < y a_\mu \vee x b_\nu.$$

Für $a = a_1 \wedge \dots \wedge a_m$, $b = b_1 \wedge \dots \wedge b_n$ reduziert sich

$$(1.12) \quad x a \wedge y b < y a \vee x b$$

aber entsprechend auf

$$x a_\mu \wedge y b_\nu < y a_\mu \vee x b_\nu,$$

so daß nur für je zwei Elemente a, b zu beweisen ist:

$$(1.13) \quad x a \wedge y b \underset{e_a}{<} y a \vee x b.$$

Für $\gamma = (a, b)$ gilt ersichtlich

$$x a \wedge y b \quad R[\gamma^{\pm 1}]'_e y a \vee x b.$$

V_{e_a} ist also ein regulärer distributiver Verbandsbereich.

§ 2.

Während es für Bereiche zur Konstruktion von regulären Überidealbereichen sachgemäß erscheint, einen Überidealbereich V_e vorzugeben, genügt es für halbgeordnete Gruppen G einen Idealbereich H_r vorzugeben. Fragt man nämlich nach einer Verbandsobergruppe V von G , so gilt in ihr wegen $(b_1 \vee \dots \vee b_n) (b_1^{-1} \wedge \dots \wedge b_n^{-1}) = 1$

$$(2.1) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m < b_1 \vee \dots \vee b_n \leftrightarrow a_1 b_1^{-1} \wedge \dots \wedge a_\mu b_\nu^{-1} \wedge \dots \wedge a_m b_n^{-1} < 1.$$

V ist also eindeutig bestimmt durch den Halbverbandsbereich H der g.g.T. $a_1 \wedge \dots \wedge a_m$. Dies Resultat folgt hier ohne Benutzung der v -Ideale [3]. Es liegt daher nahe, zu setzen

$$(2.2) \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_m \underset{r_a}{<} b_1 \vee \dots \vee b_n \leftrightarrow \bigvee_{\gamma_1, \dots, \gamma_l} a_1 b_1^{-1} \wedge \dots \wedge a_m b_n^{-1} R[\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_l^{\pm 1}]'_r 1$$

und in Analogie zu § 1 die Distributivität des hierdurch definierten Verbandsbereiches zu beweisen. Dies macht keinerlei Schwierigkeiten und es ergibt sich, daß durch (2.2) in Verbindung mit (1.3) ein distributiver Verbandsbereich V_{r_a} definiert wird.

Darüber hinaus gilt

Satz 1. V_{r_a} ist eine reguläre Verbandsgruppe.

Man sieht zunächst, daß für den Halbverbandsbereich H_{r_a} , der definiert ist durch

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_n \underset{r_a}{<} a \leftrightarrow \bigvee_{\gamma_1, \dots, \gamma_l} a_1 \wedge \dots \wedge a_n R[\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_l^{\pm 1}]'_r a$$

gilt

$$(2.3) \quad c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_n \underset{r_a}{<} 1 \rightarrow x c x^{-1} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_n \underset{r_a}{<} 1$$

$$(2.4) \quad c_1 c_2^{-1} \wedge c_2 c_3^{-1} \wedge \dots \wedge c_{n-1} c_n^{-1} \wedge c_n c_1^{-1} \underset{r_a}{<} 1.$$

Beweis von (2.3): Für $\gamma = (c, c)$ und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \neq -1, \dots, -1$ folgt aus

$$c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_n \quad R[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_l^{\pm 1}]'_r 1$$

sofort

$$c_1 \wedge \dots \wedge c_n \quad R[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}, \gamma_1^{\varepsilon_1}, \dots, \gamma_n^{\varepsilon_n}]'_r 1.$$

Außerdem folgt

$$c \quad R [\gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_n^{-1}]'_r c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_n,$$

also

$$c \quad R [\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_l^{\pm 1}, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_n^{-1}]'_r 1$$

und

$$x c x^{-1} \quad R [\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_l^{\pm 1}, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_n^{-1}]'_r 1.$$

Zusammen folgt

$$x c x^{-1} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_n \quad R [\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_l^{\pm 1}, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_n^{-1}]'_r 1.$$

Beweis von (2.4): Für $\gamma_1 = (c_1, c_2), \dots, \gamma_{n-1} = (c_{n-1}, c_n)$ und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \neq -1, \dots, -1$ gilt

$$c_1 c_2^{-1} \wedge \dots \wedge c_{n-1} c_n^{-1} \quad R [\gamma_1^{\varepsilon_1}, \dots, \gamma_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}]'_r 1.$$

Außerdem gilt

$$c_n \quad R [\gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_{n-1}^{-1}]'_r c_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$c_2 \quad R [\gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_{n-1}^{-1}]'_r c_1$$

also

$$c_n \quad R [\gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_{n-1}^{-1}]'_r c_1.$$

Zusammen folgt

$$c_1 c_2^{-1} \wedge \dots \wedge c_{n-1} c_n^{-1} \wedge c_n c_1^{-1} \quad R [\gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_n^{\pm 1}]'_r 1.$$

Jetzt definieren wir in V_{r_a} eine Multiplikation. Nach Definition von V_{r_a} läßt sich jedes Element $\mathfrak{A}$ von V_{r_a} darstellen als $\mathfrak{A} = a_1 \vee \dots \vee a_m$ mit

$$a_\mu = a_{\mu_1} \wedge \dots \wedge a_{\mu_{n_\mu}} \quad (a_{\mu_j} \in G).$$

Diese Darstellung ist selbstverständlich nicht eindeutig. Setzen wir daher

$$(2.5) \quad (a_1 \wedge \dots \wedge a_m) \quad (b_1 \wedge \dots \wedge b_n) = a_1 b_1 \wedge \dots \wedge a_\mu b_\nu \wedge \dots \wedge a_m b_n,$$

$$(2.6) \quad (a_1 \vee \dots \vee a_m) \quad (b_1 \vee \dots \vee b_n) = a_1 b_1 \vee \dots \vee a_\mu b_\nu \vee \dots \vee a_m b_n,$$

so muß gezeigt werden, daß hierdurch eine Operation definiert wird, die invariant gegenüber der Wahl der Darstellung ist. Für (2.5) folgt diese Invarianz aus — wir schreiben im folgenden $<_{r_a}$ statt $<$ —

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m <_{r_a} a'_1 \wedge \dots \wedge a'_{m'} \rightarrow a_1 b_1 \wedge \dots \wedge a_m b_n <_{r_a} a'_1 b_1 \wedge \dots \wedge a'_{m'} b_n$$

und

$$b_1 \wedge \dots \wedge b_n <_{r_a} b'_1 \wedge \dots \wedge b'_{n'} \rightarrow a b_1 \wedge \dots \wedge a b_n <_{r_a} a b'_1 \wedge \dots \wedge a b'_{n'}.$$

Es ist also nur zu zeigen:

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m < b \rightarrow x a_1 y \wedge \dots \wedge x a_m y < x b y.$$

Dies folgt aber trivial daraus, daß H_{r_a} Halbverbandsbereich ist mit den Elementen von G als Links- und Rechtsoperatoren [vgl. (1.10)].

Für die Invarianz von (2.6) ist entsprechend zu zeigen:

$$a < b_1 \vee \dots \vee b_n \rightarrow x a y < x b_1 y \vee \dots \vee x b_n y.$$

Wegen der verbandstheoretischen Distributivität reduziert sich diese Implikation zunächst auf

$$a < b_1 \vee \dots \vee b_n \rightarrow \xi a \eta < \xi b_1 \eta \vee \dots \vee \xi b_n \eta$$

und für

$$\xi = x_1 \wedge \dots \wedge x_k, \quad \eta = y_1 \wedge \dots \wedge y_l$$

dann auf

$$(2.7) \quad \begin{cases} a_1 \wedge \dots \wedge a_m < b_1 \vee \dots \vee b_n \rightarrow \\ \rightarrow (x_1 \wedge \dots \wedge x_k) (a_1 \wedge \dots \wedge a_m) (y_1 \wedge \dots \wedge y_l) < x_{\kappa_1} b_1 y_{\lambda_1} \vee \dots \vee x_{\kappa_n} b_n y_{\lambda_n} \end{cases}$$

für alle $\kappa_1, \dots, \kappa_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \begin{pmatrix} 1 \leq \kappa_p \leq k \\ 1 \leq \lambda_p \leq l \end{pmatrix}$.

Nach (2.1) lautet jetzt die Voraussetzung

$$(2.7.1) \quad a_1 b_1^{-1} \wedge \dots \wedge a_\mu b_\mu^{-1} \wedge \dots \wedge a_m b_n^{-1} < 1$$

und die Behauptung

$$(2.7.2) \quad \dots \wedge x_\kappa a_\mu y_\lambda (x_{\kappa_p} b_p y_{\lambda_p})^{-1} \wedge \dots < 1$$

In (2.7.2) lautet das Glied mit $\kappa = \kappa_p, \lambda = \lambda_p$

$$x_{\kappa_p} a_\mu b_p^{-1} x_{\kappa_p}^{-1}.$$

Wegen (2.3) ist also (2.7.2) eine Folge von (2.7.1).

Für die damit definierte Multiplikation in V_{r_a} gilt selbstverständlich die Assoziativität. Das Einselement 1 von G ist auch Einselement von V_{r_a} . Ferner gilt auf Grund der Definition (2.6) die folgende Distributivität

$$(2.8) \quad \mathfrak{B}_1 (\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2) \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \vee \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2.$$

Um die Gruppeneigenschaft von V_{r_a} zu beweisen, zeigen wir zunächst die Gültigkeit von

$$(2.9) \quad \mathfrak{B}_1 (\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2) \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \wedge \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2.$$

Als ersten Fall behandeln wir

$$(2.10) \quad (a_1 \wedge \dots \wedge a_m) (b_1 \vee \dots \vee b_n) = a_1 (b_1 \vee \dots \vee b_n) \wedge \dots \wedge a_m (b_1 \vee \dots \vee b_n).$$

Die Gültigkeit mit $<$ statt $=$ folgt aus

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_m) (b_1 \vee \dots \vee b_n) = (a_1 \wedge \dots \wedge a_m) b_1 \vee \dots \vee (a_1 \wedge \dots \wedge a_m) b_n$$

und

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_m) b_p < a_\mu (b_1 \vee \dots \vee b_n).$$

Die Gültigkeit für $>$ reduziert sich auf Grund der verbandstheoretischen Distributivität auf

$$(2.11) \quad \begin{cases} a_1 b_{v_1} \wedge \dots \wedge a_m b_{v_m} < a_{\mu_1} b_1 \vee \dots \vee a_{\mu_n} b_n \\ \text{für alle } v_1, \dots, v_m, \mu_1, \dots, \mu_n \begin{pmatrix} 1 \leq v_\mu \leq n \\ 1 \leq \mu_p \leq m \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{s+1} = \mu_{v\lambda_s}.$$

Dann tritt in $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$ mindestens eine Zahl zweimal auf, es sei etwa $\lambda_s = \lambda_{t+1}$ ($s \leq t$).

Nach (2.4) ist zu zeigen

$$a_1 b_{\nu_1} (a_{\mu_1} b_1)^{-1} \wedge \dots \wedge a_\mu b_{\nu_\mu} (a_{\mu_\nu} b_\nu)^{-1} \wedge \dots < 1.$$

Unter diesen Gliedern treten auf

$$a_{\lambda_s} b_{v\lambda_s} (a_{\mu_{v\lambda_s}} b_{v\lambda_s})^{-1} \wedge \dots \wedge a_{\lambda_t} b_{v\lambda_t} (a_{\mu_{v\lambda_t}} b_{v\lambda_t})^{-1},$$

d.h. aber

$$a_{\lambda_s} a_{\lambda_{s+1}}^{-1} \wedge \dots \wedge a_{\lambda_t} a_{\lambda_{t+1}}^{-1}.$$

Mit Hilfe von (2.4) folgt daher die Gültigkeit von (2.11) und dann von (2.10). Als nächsten Fall behandeln wir

$$(2.12) \quad (a_1 \wedge \dots \wedge a_m) (b_1 \vee \dots \vee b_n) = a_1 (b_1 \vee \dots \vee b_n) \wedge \dots \wedge a_m (b_1 \vee \dots \vee b_n).$$

Wieder ist die Gültigkeit mit $<$ statt $=$ trivial. Für $>$ reduziert sich (2.12) auf

$$a_1 b_{\nu_1} \wedge \dots \wedge a_m b_{\nu_m} < a_{\mu_1} b_1 \vee \dots \vee a_{\mu_n} b_n,$$

wegen der verbandstheoretischen Distributivität also auf

$$a_1 b_{\nu_1} \wedge \dots \wedge a_m b_{\nu_m} < a_{\mu_1} b_{1\lambda_1} \vee \dots \vee a_{\mu_n} b_{n\lambda_n}.$$

Nun gilt aber trivialerweise

$$a_1 b_{\nu_1} \wedge \dots \wedge a_m b_{\nu_m} < a_1 b_{\nu_1\lambda_{\nu_1}} \wedge \dots \wedge a_m b_{\nu_m\lambda_{\nu_m}},$$

und

$$a_1 b_{\nu_1\lambda_{\nu_1}} \wedge \dots \wedge a_m b_{\nu_m\lambda_{\nu_m}} < a_{\mu_1} b_{1\lambda_1} \vee \dots \vee a_{\mu_n} b_{n\lambda_n}$$

folgt aus (2.11).

Damit haben wir die Distributivität

$$(2.13) \quad (a_1 \wedge a_2) \mathfrak{B} = a_1 \mathfrak{B} \wedge a_2 \mathfrak{B}$$

erhalten, und es bleibt nur noch zu zeigen

$$(2.14) \quad (\mathfrak{U}_1 \wedge \mathfrak{U}_2) \mathfrak{B} = \mathfrak{U}_1 \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{U}_2 \mathfrak{B}.$$

Die Links-distributivität ergibt sich dann analog. Nun ist für

$$\mathfrak{U}_1 = a_{11} \vee \dots \vee a_{1k_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{U}_2 = a_{21} \vee \dots \vee a_{2k_2}$$

$$\mathfrak{U}_1 \wedge \mathfrak{U}_2 = (a_{11} \wedge a_{21}) \vee \dots \vee (a_{1k_1} \wedge a_{2k_2}).$$

Nach (2.8) gilt also

$$(\mathfrak{U}_1 \wedge \mathfrak{U}_2) \mathfrak{B} = (a_{11} \wedge a_{21}) \mathfrak{B} \vee \dots \vee (a_{1k_1} \wedge a_{2k_2}) \mathfrak{B}$$

und nach (2.13)

$$\begin{aligned} (\mathfrak{U}_1 \wedge \mathfrak{U}_2) \mathfrak{B} &= (a_{11} \mathfrak{B} \wedge a_{21} \mathfrak{B}) \vee \dots \vee (a_{1k_1} \mathfrak{B} \wedge a_{2k_2} \mathfrak{B}) \\ &= (a_{11} \mathfrak{B} \vee \dots \vee a_{1k_1} \mathfrak{B}) \wedge (a_{21} \mathfrak{B} \vee \dots \vee a_{2k_2} \mathfrak{B}) \\ &= \mathfrak{U}_1 \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{U}_2 \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Nach dem Beweis von (2.9) definieren wir jetzt inverse Elemente in V_{r_a} durch

$$(2.15) \quad (a_1 \wedge \dots \wedge a_n)^{-1} = a_1^{-1} \vee \dots \vee a_n^{-1}$$

$$(2.16) \quad (a_1 \vee \dots \vee a_n)^{-1} = a_1^{-1} \wedge \dots \wedge a_n^{-1}.$$

Die Invarianz gegenüber der Wahl der Darstellung ergibt sich hier aus

$$(2.17) \quad a a^{-1} = 1$$

$$(2.18) \quad \mathfrak{A} \mathfrak{A}^{-1} = 1.$$

Die Gültigkeit von (2.17) mit $<$ statt $=$ folgt wegen (2.8) aus

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) (a_1^{-1} \vee \dots \vee a_n^{-1}) = (a_1 \wedge \dots \wedge a_n) a_1^{-1} \vee \dots \vee (a_1 \wedge \dots \wedge a_n) a_n^{-1}$$

und

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) a_v^{-1} < a_v a_v^{-1} = 1.$$

Ebenso folgt wegen (2.9) aus

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) (a_1^{-1} \vee \dots \vee a_n^{-1}) = a_1 (a_1^{-1} \vee \dots \vee a_n^{-1}) \wedge \dots \wedge a_n (a_1^{-1} \vee \dots \vee a_n^{-1})$$

und

$$a_v (a_1^{-1} \vee \dots \vee a_n^{-1}) > a_v a_v^{-1} = 1$$

die Gültigkeit von (2.17) mit $>$ statt $=$.

Unter Benutzung von (2.17) folgt dann (2.18) analog.

Zum Beweis von Satz 1 bleibt nur noch die Regularität von V_{r_a} zu zeigen, d. h.

$$(2.19) \quad \mathfrak{X} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{Y} < \mathfrak{X} \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \mathfrak{Y}.$$

Wie bei (1.11) reduziert sich (2.19) auf

$$\mathfrak{X} a \wedge b \mathfrak{Y} < \mathfrak{X} b \vee a \mathfrak{Y},$$

und dann nochmals wie bei (1.11) auf

$$(2.20) \quad x a \wedge b y < x b \vee a y.$$

Nach (2.1) ist also

$$(x a \wedge b y) (b^{-1} x^{-1} \wedge y^{-1} a^{-1}) < 1$$

zu beweisen. Links kommen vor $x a b^{-1} x^{-1}$ und $b a^{-1}$. Nach (2.3) ist daher nur $a b^{-1} \wedge b a^{-1} < 1$ zu beweisen, was aber aus (2.4) folgt.

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß $a b^{-1} \wedge b a^{-1} < 1$ bekanntlich in jeder Verbandsgruppe gilt. Es läßt sich ebenso leicht zeigen, daß (2.4) – und daher auch (2.11) – in jeder Verbandsgruppe gilt. Jede Verbandsgruppe V ist nämlich rechtsregulär²⁾ (ebenso auch linksregulär), d.h. es gilt

$$(2.21) \quad a x \wedge b y < a y \vee b x.$$

Denn (2.21) ist äquivalent mit

$$(a x \wedge b y) (y^{-1} a^{-1} \wedge x^{-1} b^{-1}) < a b^{-1} \wedge b a^{-1} < 1.$$

Nach [4], Satz 3 ist also die Halbordnung von V Konjunktion zulässiger Ordnungen, d.h. aber hier von Rechtsordnungen mit

$$a < b \rightarrow a x < b x.$$

Um (2.4) für V zu beweisen, genügt es also (2.4) für Rechtsordnungen $<$ zu zeigen. Gilt nun $c_1 < c_2$ oder $c_2 < c_3$ oder ... $c_{n-1} < c_n$, so folgt sofort (2.4). Andernfalls gilt aber $c_n < c_{n-1} < \dots < c_1$ d.h. $c_n < c_1$, und es folgt ebenfalls (2.4).

§ 3.

In § 2 ist für jede halbgeordnete r -Gruppe G eine reguläre Verbandsgruppe V_{r_a} konstruiert. V_{r_a} ist ein Überidealbereich von G , wenn die Halbordnung von V_{r_a} eine Fortsetzung der Halbordnung von G ist, d.h. wenn gilt:

$$a R[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_l^{\pm 1}], 1 \rightarrow a < 1.$$

G heißt dann r -abgeschlossen.

Für den Spezialfall eines Körpers, in dem eine Teilbarkeit R durch Auszeichnung eines Integritätsbereiches I definiert ist und zu dessen (kommutativer) multiplikativer Gruppe G daher der Idealbereich H_d der DEDEKINDschen Ideale von I vorgegeben ist, entsprechen die d -zulässigen Halbordnungen von G eineindeutig den Oberringen von I . Die Halbordnung $R[\gamma]_d$ entspricht für $\gamma = (a, b)$ dem Integritätsbereich $I[a^{-1}b]$. Daher lautet die Bedingung der d -Abgeschlossenheit (der sog. Ganzabgeschlossenheit)

$$a \in I[c_1^{\pm 1}, \dots, c_l^{\pm 1}] \rightarrow a \in I.$$

Die Definition der regulären d_a -Überidealgruppe lautet

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \underset{d_a}{<} b_1 \vee \dots \vee b_n \longleftrightarrow \bigvee_{c_1, \dots, c_l} 1 \in (a_1 b_1^{-1}, \dots, a_m b_n^{-1}) I[c_1^{\pm 1}, \dots, c_l^{\pm 1}].$$

²⁾ Anmerkung. Dagegen gibt es Verbandsgruppen, die nicht regulär sind. In der Gruppe der Ordnungsautomorphismen $f, g, \dots$ der reellen Geraden mit $f < g \leftrightarrow \wedge_x f|x \leq g|x$ und der Verkettung $f|g$ als Multiplikation (Einselement $e|x = x$) gilt z.B. für

$$f|x = 2x, \quad g|x = x - 3$$

mit den Inversen

$$\bar{f}|x = \frac{x}{2}, \quad \bar{g}|x = x + 3$$

nicht $\bar{f} \wedge g|f|\bar{g} < e$ (man nehme $x = -2$).

Diese Definition geht für $n = 1$ in die übliche Definition der Ganzabhängigkeit über auf Grund von

Satz 2.

$$\bigvee_{c_1, \dots, c_l} 1 \in (a_1, \dots, a_m) I [c_1^{\pm 1}, \dots, c_l^{\pm 1}] \longleftrightarrow \bigvee_k 1 \in \sum_{\times}^k (a_1, \dots, a_m)^{\times}.$$

Satz 2 ergibt sich aus [3], Satz 27 und [2] § 6, läßt sich jedoch direkt auch folgendermaßen beweisen:

Gilt

$$(3.1) \quad 1 \in \sum_{\times}^k (a_1, \dots, a_m)^{\times},$$

dann folgt

$$(3.2) \quad 1 \in (a_1, \dots, a_m) I [a_1, \dots, a_m].$$

Also gilt wegen

$$1 \in (a_1, \dots, a_m) I [a_{\mu}^{-1}]$$

auch

$$1 \in (a_1, \dots, a_m) I [a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}].$$

Aus

$$1 \in (a_1, \dots, a_m) I [c^{\pm 1}]$$

folgt umgekehrt (3.2), da aus

$$1 \in (a_1, \dots, a_m) (1, c, \dots, c^n)$$

und

$$1 \in (a_1, \dots, a_m) (1, c^{-1}, \dots, c^{-n})$$

sofort

$$(c^{-n}, \dots, 1, \dots, c^n) < (a_1, \dots, a_m) (c^{-n}, \dots, 1, \dots, c^n)$$

folgt, und hieraus (3.1) durch Bildung der Determinante. Durch Induktion nach l folgt jetzt (3.2) und dann (3.1) auch aus

$$(3.3) \quad 1 \in (a_1, \dots, a_m) I [c_1^{\pm 1}, \dots, c_l^{\pm 1}].$$

Literatur.

- [1] KRULL, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160—196 (1931). — [2] PRÜFER, H.: Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften von Körpern. J. reine angew. Math. **168**, 1—36 (1932). — [3] LORENZEN, P.: Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z. **52**, 483—526 (1940). — [4] LORENZEN, P.: Teilbarkeits-theorie in Be-reichen. Math. Z. **55**, 269—275 (1952). — [5] LORENZEN, P.: Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände. J. Symb. Log. **16**, 81—106 (1951).

Bonn, Luisenstr. 3.

(Eingegangen am 10. Oktober 1952.)

Assoziativ auflösbare Ringe.

Von
ERNST-AUGUST BEHRENS.

Einleitung.

Durch das Problem der Schnittmultiplizität in der algebraischen Geometrie wurde der Verfasser veranlaßt, in die Theorie der nicht notwendig assoziativen Ringe (Naringe) den Begriff der *assoziativ auflösbaren* Ringe einzuführen. Er ist analog zum Begriff der abelsch auflösbaren Gruppen in der Gruppentheorie gebildet, wobei einer Kette von Normalteilern hier eine Kette von Idealen und den abelschen Faktorgruppen hier solche Restklassenringe entsprechen, deren Multiplikation durchweg assoziativ ist.

Bei der Strukturuntersuchung der assoziativ auflösbaren Ringe (§ 2) ergibt sich als bemerkenswerter Zusammenhang zwischen den Assoziatoren $(a\ b)\ c - a\ (b\ c)$ eines solchen Ringes a und seinem nach SMILEY gebildeten Radikal $N(a)$, daß der halbeinfache Ring $a/N(a)$ stets assoziativ ist (Korollar zu Satz 12). Demzufolge erweist sich dann das Radikal $N(a)$ als Urbild des Radikales des assoziativen Ringes a/a_1 , wobei a_1 das von allen Assoziatoren aus a erzeugte zweiseitige Ideal und die Abbildung der natürliche Homomorphismus von a auf a/a_1 ist (Satz 13).

Die Automorphismengruppe (§ 3) eines assoziativ auflösbaren Ringes läßt sich auf eine Untergruppe des freien direkten Produktes der Automorphismengruppen der assoziativen Restklassenringe einer gewissen a auflösenden Idealkette zurückführen, zumindest dann, wenn keiner dieser Restklassenringe universelle Annihilatoren enthält (Satz 15). Dies Ergebnis legt natürlich die Frage nahe, ob ein assoziativ auflösbarer Ring etwa schon durch die Restklassenringe einer ihn auflösenden Kette eindeutig bestimmt sei. Daß das aber keineswegs so ist, zeigt die in § 4 behandelte Erweiterungstheorie.

Der Zusammenhang der assoziativ auflösbaren Ringe mit der algebraischen Geometrie wird zwar in § 5 eingehend besprochen, doch ist es vielleicht nützlich, ihn bereits jetzt an einem Beispiel zu erläutern: In der Ebene seien eine Kurve C dritten Grades mit dem Doppelpunkt P_1 und eine Gerade G durch P_1 gegeben, die C noch im Punkte P_2 schneide. Mit rationalen Zahlen β, γ als Koeffizienten bilde man die gemischtdimensionalen Zyklen $\beta_1 C + \beta_2 G + \gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2$. Sie bilden einen Modul vom Range vier über dem Körper der rationalen Zahlen, den man dadurch zu einer Algebra a_0 machen kann, daß man die Produkte der Basiselemente entsprechend der Multiplizitätstheorie [1]

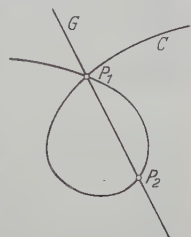


Fig. 1.

des Verfassers für uneigentliche Schnittkomponenten definiert. Im obigen Beispiel ist also $C \cdot G = 2P_1 + P_2$, $P_1 \cdot C = 2P_1$, $P_2 \cdot C = P_2$, alle Basis-elemente sind idempotent usw. Dieser kommutative Ring ist nicht assoziativ, denn der Assoziator $[P_1, C, C] = (P_1 \cdot C) \cdot C - P_1 \cdot (C \cdot C) = 4P_1 - 2P_1$ ist ungleich null. Daß es sich um einen wirklich nicht assoziativen Ring handelt, liegt eben daran, daß P_1 Doppelpunkt von C ist. Rechnet man aber modulo den Elementen $\gamma_1 P_1$, die in a_0 ein Ideal a_1 bilden, so erweisen sich die Assoziatoren aller Restklassen als null, und überdies ist der zum Körper der rationalen Zahlen isomorphe Ring a_1 selbst assoziativ. Also ist $a_0 > a_1 > a_2 = 0$ eine a_0 assoziativ auflösende Kette.

Zum Verständnis des § 2 der vorliegenden Abhandlung benötigt man den Zusammenhang einer subdirekten Summe einfacher Ringe mit Einselementen und dem nach SMILEY gebildeten Radikal (Satz 10). Doch wird im folgenden dieser von SMILEY stammende Satz auf dem von BROWN und MCCOY [3] beschriebenen Wege (Sätze 8 und 9) bewiesen, weil es kaum eine Platzersparnis bedeutet hätte, diesen Zusammenhang in der hier benötigten Ausführlichkeit nur zu zitieren. — Sätze aus der algebraischen Geometrie werden erst in § 5 herangezogen.

§ 1. Definition und elementare Eigenschaften der assoziativ auflösbaren Ringe.

Die in diesen Ausführungen untersuchten Ringe seien nicht notwendig assoziativ, d.h. ihre Multiplikation darf zwar durchweg dem Assoziativgesetz genügen, braucht es aber nicht. Unter ihnen sei eine Klasse ausgezeichnet durch folgende

Definition 1: Der Ring a_0 sei *assoziativ auflösbar* (ass. Aufl.), wenn er eine Idealkette $a_0 > i_1 > \dots > i_s = 0$ besitzt, in deren Restklassenringen $a_0/i_1, \dots, i_{s-1}/i_s$ die Multiplikation durchweg assoziativ ist. Dabei braucht i_{k+1} nur Ideal im Ring i_k , aber nicht auch Ideal in a_0 zu sein. Eine Idealkette mit diesen Eigenschaften heiße eine *a_0 auflösende Kette von der Länge s* .

Satz 1. Jede Idealkette eines ass. Aufl. Ringes a_0 läßt sich zu einer a_0 auflösenden Kette verfeinern.

Diese Behauptung ist ein Korollar des folgenden Analogons zum Satze von JORDAN-HÖLDER-SCHREIER aus der Gruppentheorie:

Satz 2. Zwei Idealketten eines beliebigen Ringes besitzen Verfeinerungen mit ringisomorphen Restklassenringen.

Zum Beweis von Satz 2 braucht man sich nur daran zu erinnern, daß man in der Gruppentheorie (VAN DER WAERDEN [8], § 48) den Satz von JORDAN-HÖLDER-SCHREIER durch vollständige Induktion nach den Längen der beiden Ketten von Normalteilern mittels des Isomorphiesatzes $a/a \cap b \cong a + b/b$ beweisen kann. Letztere Beziehung gilt bekanntlich auch für Operatorisomorphie, insbesondere also dann, wenn a ein Unterring und b ein Ideal eines Ringes a_0 sind und die Operatoren in Multiplikationen mit Elementen aus a bestehen. Dann ist aber der obige Operatorisomorphismus sogar ein Ringisomorphismus

zwischen den Restklassenringen $a/a \cap b$ und $a \cap b/b$, wie die folgende Analyse der Abbildung zeigt: Die Restklasse $\bar{a} = a \bmod a \cap b$ wird abgebildet auf die Restklasse $\bar{\bar{a}} = a \bmod b$. Der Operator L_r sei die Linksmultiplikation mit dem Element r aus a , also $a L_r = r \cdot a$ und $\bar{a} L_r = \bar{r \cdot a} = \bar{r} \cdot \bar{a}$, entsprechend $\bar{\bar{a}} L_r = \overline{\bar{r \cdot a}} = \bar{\bar{r}} \cdot \bar{\bar{a}}$. Da nun bei der Operatorisomorphie $\bar{a} \cdot L_r \leftrightarrow \bar{\bar{a}} L_r$ gilt, folgt $\bar{r} \cdot \bar{a} \leftrightarrow \bar{\bar{r}} \cdot \bar{\bar{a}}$. Analog für Rechtsmultiplikation. Damit ist alles bereitgestellt, um den Satz 2 wörtlich so zu beweisen wie den Satz von JORDAN-HÖLDER-SCHREIER in [8]. — Daß die Multiplikation im Ringe a_0 eventuell nicht durchweg assoziativ ist, hat für den Beweis keine Bedeutung, da es sich in ihm immer nur um das Produkt zweier Ringelemente handelt.

Aus Satz 1 folgt der

Satz 3: Der Restklassenring eines ass. aufl. Ringes a_0 nach einem Ideal i ist wieder ass. aufl..

Man braucht nämlich nur durch i eine a_0 auflösende Kette $a_0 = i_0 \supset i_1 \supset \dots \supset i_r = i \supset i_{r+1} \supset \dots \supset i_s = 0$ zu legen und wie im Beweise von Satz 2 durch Analyse der Abbildung zu zeigen, daß die Restklassenringe $i_k/i/i_{k-1}/i$ und i_k/i_{k+1} für $k=0, 1, \dots, r-1$ einander ringsomorph sind.

Zum Beweis des folgenden Satzes über die Auflösbarkeit der Unterringe benötigt man das auch sonst sehr nützliche

Lemma 1: Der Restklassenring eines Ringes a nach einem Ideal i ist dann und nur dann assoziativ, wenn i die Assoziatoren $[a, b, c] = (a b) c - a (b c)$ aller Tripel a, b, c von Elementen aus a enthält.

Beweis. Der Assoziator $[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$ der von a, b, c repräsentierten Restklassen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ modulo i ist dann und nur dann gleich $\bar{0}$, wenn $[a, b, c] \equiv 0 \pmod{i}$ ist.

Satz 4. Jeder Unterring u eines ass. aufl. Ringes a_0 ist wieder ass. aufl.

Beweis. Wenn $a_0 \supset i_1 \supset \dots \supset i_s = 0$ den Ring a_0 auflöst, dann ist

$$u = (u \cap a_0) \supseteq (u \cap i_1) \supseteq \dots \supseteq (u \cap i_s) = 0$$

eine Idealkette von u , die u gemäß Lemma 1 auflöst, weil der Assoziator $[u_k, v_k, w_k]$ je dreier Elemente aus $u \cap i_k$ sowohl im Ring u als auch, wieder nach Lemma 1, im Ideal i_{k-1} , also auch in $u \cap i_{k+1}$ liegt. — Natürlich kann dabei die Länge der auflösenden Kette geringer werden, z.B. dann, wenn $u = i_1$ ist.

Das Lemma 1 erlaubt, unter allen a_0 auflösenden Ketten eine gewisse Minimalkette auszuzeichnen. $a_0 \supset i_1 \supset \dots \supset i_s = 0$ sei irgendeine a_0 auflösende Kette. Nach Lemma 1 muß dann i_1 die Assoziatoren aller Elementetripel aus a_0 enthalten, und, da i_1 Ideal ist, auch das ganze von ihnen in a_0 erzeugte Ideal $a_1 = (\{[a_0, b_0, c_0]; a_0, b_0, c_0 \in a_0\})$. Auch a_1 ist als Unterring von a_0 nach Satz 4 wieder ass. aufl., und es sei a_2 das von den Assoziatoren aller Elementetripel aus a_1 in a_1 erzeugte Ideal, $a_2 = (\{[a_1, b_1, c_1]; a_1, b_1, c_1 \in a_1\})_1$ usw. Mit diesen Bezeichnungen gilt

Satz 5: Die $a_{k-1} = (\{[a_k, b_k, c_k]; a_k, b_k, c_k \in a_k\})_k$ bilden eine a_0 auflösende Kette $a_0 \supset a_1 \supset \dots \supset a_n = 0$. Sie ist minimal in dem Sinne, daß für jede a_0 auflösende Kette $a_0 \supset i_1 \supset \dots \supset i_s = 0$ gilt $a_k \subseteq i_k$ für $k=1, 2, \dots, n \leq s$.

Beweis durch vollständige Induktion nach k : Die Verankerung $a_1 \subseteq i_1$ wurde schon oben gezeigt. Sei also $a_k \subseteq i_k$. Dann ist a_k ein Unterring und i_{k+1} ein Ideal in i_k und die im Beweis von Satz 2 benutzte Ringisomorphie ergibt $a_k/a_k \cap i_{k+1} \cong a_k + i_{k+1}/i_{k+1} \subseteq i_k/i_{k+1}$. Aus der Assoziativität von i_k/i_{k+1} und damit von $a_k/a_k \cap i_{k+1}$ kann man nun nach Lemma 1 auf $a_{k+1} \subseteq a_k \cap i_{k+1} \subseteq i_{k+1}$ schließen. — Natürlich folgt aus $i_s = 0$ und $a_k \subseteq i_k$, daß von einem gewissen $n \leq s$ ab $a_n = a_{n+1} = \dots = a_s = 0$ sein muß.

Definition 2. Für den Rest dieser Abhandlung seien mit a_k ausschließlich die Ideale der Minimalkette aus Satz 5 bezeichnet. a_0 heiße *auf lösbar von der Länge n* , wenn a_n das erste Nullideal in der Kette der a_k ist.

Ein assoziativer Ring ist *auf lösbar von der Länge 1*.

Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch auf die Relationen zwischen den Elementen eines Ringes a_0 eingegangen, die aus der assoziativen Auflösbarkeit von a_0 fließen. — Wenn a_0 *auf lösbar* ist von der Länge 1, so sind die Assoziatoren $[a_0, b_0, c_0] = (a_0 b_0) c_0 - a_0 (b_0 c_0)$ aller Elementetripel aus a_0 gleich Null. Dieser „Assoziator erster Stufe“ $[a_0, b_0, c_0]^{(1)}$ besteht aus zwei Summanden, von denen jeder ein Produkt der drei Elemente a_0, b_0, c_0 mit ± 1 ist. — Wenn a_0 *auf lösbar* ist von der Länge 2, so liegen die drei Assoziatoren $[a_0, b_0, c_0]$, $[a'_0, b'_0, c'_0]$, $[a''_0, b''_0, c''_0]$ in a_1 , das selbst ein assoziativer Ring ist. Daraus folgt für je neun Elemente aus a_0 die Relation $[a_0, b_0, c_0]$, $[a'_0, b'_0, c'_0]$, $[a''_0, b''_0, c''_0] = 0$, deren linke Seite man als Assoziator zweiter Stufe bezeichnen könnte, $[a_0, \dots, c_0]^{(2)}$. Er besteht aus 16 Summanden zu je 9 Faktoren, noch multipliziert mit ± 1 . — So kann man natürlich fortfahren und rekursiv die Assoziatoren n -ter Stufe definieren, die Relationen zwischen jeweils 3^n Elementen eines Ringes geben, der *auf lösbar* ist von der Länge n . Doch werden diese Beziehungen mit wachsendem n sehr schnell unhandlich, denn bereits bei $n=3$ handelt es sich um 8192 Summanden zu je 27 Faktoren gemäß der durch vollständige Induktion leicht zu beweisenden Formel, daß ein Assoziator n -ter Stufe aus $2^{\frac{1}{2}(3^n-1)}$ Summanden in je 3^n dem Ringe a_0 entnommenen Faktoren besteht.

§ 2. Strukturtheorie.

Satz 6. *Für einfache Ringe besagen die Begriffe Assoziativität und assoziative Auflösbarkeit dasselbe.*

Beweis. Wenn a_0 ass. aufl. ist, muß nach Satz 5 das Ideal a_1 echte Untermenge von a_0 , also, falls a_0 überdies einfach ist, a_1 gleich dem Nullideal sein. Daraus folgt nach Definition von a_1 , daß alle Assoziatoren gleich Null sind. Die Umkehrung ist trivial.

Das erste Ziel der folgenden Untersuchungen ist, auch für halbeinfache Ringe den Satz 6 zu beweisen. Dabei sei, um das Wesentliche hervortreten zu lassen, zunächst die absteigende Kettenbedingung für a_0 vorausgesetzt. Dann ist ein im Sinne von SMILEY [7] halbeinfacher Ring a_0 die volle direkte Summe $\sum_{i=1}^m r_i$ von einfachen Ringen r_i mit Einselementen. Die Folge der

$i_k = \sum_{i=1}^{m-k} r_i$, $k=0, 1, \dots, m$, $r_0=0$, bildet eine Idealkette von a_0 , die sich wegen der Isomorphie zwischen i_k/i_{k+1} und dem einfachen Ringe r_{m-k} nicht mehr verfeinern läßt. Falls a_0 ass. Aufl. ist, müssen also nach Satz 1 die i_k bereits eine a_0 auflösende Kette bilden, und daher die direkten Summanden r_{m-k} sämtlich assoziative Ringe sein. Das zieht die Assoziativität von a_0 nach sich. Die Umkehrung ist wieder trivial.

Wenn die Gültigkeit der absteigenden Kettenbedingung für a_0 nicht vorausgesetzt wird, tritt an die Stelle der Darstellung von a_0 als volle direkte Summe eine Darstellung als subdirekte Summe $\sum_i r_i$ von einfachen Ringen r_i mit Einselementen. Zum Begriff der subdirekten Summe gelangt man folgendermaßen: Ω sei eine Menge von Elementen ι derart, daß jedem ι eindeutig ein Ring r_ι zugeordnet sei. φ sei eine Funktion auf Ω , die jedem ι eindeutig ein Element $\varphi(\iota)$ in dem zugehörigen Ring r_ι zuweist. Dabei heißt der Funktionswert $\varphi(\iota)$ die ι -Komponente von φ . Diese Funktionen φ bilden einen Ring $\mathfrak{R}$, wenn man ihre Addition und Multiplikation komponentenweise erklärt. Ein Unterring a_0 von $\mathfrak{R}$ ist eine *subdirekte Summe* der Ringe r_i , $a_0 = \sum_i r_i$, $\iota \in \Omega$, wenn jedes in r_i vorgegebene Element r_i die ι -Komponente von mindestens einem Element φ aus a_0 ist: $r_i = \varphi(\iota)$. Für eine Funktion φ aus a_0 werde zukünftig a_0 und für ihre ι -Komponente $\varphi(\iota)$ werde $a_{0,\iota}$ geschrieben. — Unter der ι -Komponente i_1 eines Ideales i_1 von a_0 versteht man die Menge aller Elemente aus r_i , die als ι -Komponente mindestens eines Elementes aus i_1 auftreten. Man sieht sofort, daß i_1 Ideal in r_i ist; wenn nämlich a_1 in i_1 liegt und r_i aus r_i etwa die ι -Komponente von a_0 aus a_0 ist, d. h. $r_i = a_{0,\iota}$, dann ist nach den obigen Rechenregeln $r_i \cdot a_1 = (a_0 \cdot a_1)_i \in i_1$. Entsprechend für Multiplikation von rechts.

Nun sollten die r_i einfache Ringe sein, d. h. die ι -Komponente eines Ideales i_1 ist entweder r_i oder 0. Jedes Ideal i_1 in a_0 erweist sich daher als eine subdirekte Summe $\sum_{i_1} r_{i_1}$, wobei nur die von 0 verschiedenen Summanden hingeschrieben sind, wobei also die Indizes i_1 eine Teilmenge Ω_1 von Ω bilden. — Es soll jetzt unter Benutzung der a_0 auflösenden Minimalkette $a_0 > a_1 > \dots > a_n = 0$ gezeigt werden, daß alle r_i , $\iota \in \Omega$, assoziative Ringe sind. Der Assoziator $[a_{0,\iota}, b_{0,\iota}, c_{0,\iota}]$ dreier Elemente aus r_i ist gleich $[a_0, b_0, c_0]_\iota$, liegt also nach Definition von a_1 in $a_{1,\iota}$. Es sei $a_1 = \sum_{i_1} r_{i_1}$, $i_1 \in \Omega_1 \subset \Omega$. Da alle übrigen Komponenten $a_{1,\iota}$ von a_1 gleich 0 sind, folgt, daß zumindest diejenigen $[a_{0,\iota}, b_{0,\iota}, c_{0,\iota}] = 0$ sein müssen, deren ι nicht zu Ω_1 gehören, daß also zumindest diese Ringe r_i , $\iota \notin \Omega_1$, assoziativ sind. Denselben Schluß kann man nun innerhalb a_1 auf $a_2 = \sum_{i_2} r_{i_2}$, $i_2 \in \Omega_2 \subset \Omega_1$, anwenden, weil das Ideal a_2 in a_1 dieselbe Rolle spielt, wie a_1 in a_0 . Man erkennt, daß auch alle diejenigen Ringe assoziativ sein müssen, deren Indizes ι nicht zu Ω_2 gehören, usw. Hierbei werden alle Ringe r_i , die in der Darstellung von a_0 als subdirekte Summanden auftreten, erfaßt, weil ja nach Voraussetzung $a_n = 0$ und daher in $a_n = \sum_{i_n} r_{i_n}$, $i_n \in \Omega_n$, die Menge Ω_n leer ist. (An dieser Stelle wird die Auflösbarkeit von a_0 wesentlich benutzt.) — Aus der Assoziativität aller r_i folgt sofort die Assoziativität von a_0 . Damit ist bewiesen der

Satz 7: Für subdirekte Summen einfacher Ringe fallen die Begriffe Assoziativität und assoziative Auflösbarkeit zusammen.

Korollar. Für halbeinfache Ringe, d.h. für subdirekte Summen einfacher Ringe mit Einselementen, ist Assoziativität äquivalent mit assoziativer Auflösbarkeit.

Die halbeinfachen Ringe lassen sich auch noch anders charakterisieren, nämlich dadurch, daß ihr Radikal gleich Null ist. Das deutet auf einen Zusammenhang zwischen den Assoziatoren eines ass. Aufl. Ringes a_0 und seinem Radikal hin. Der genauen Analyse dieser Beziehung soll der Rest dieses Paragraphen gewidmet sein.

Das im Sinne von SMILEY [7] gebildete Radikal $N(a_0)$ eines Ringes a_0 besteht aus allen denjenigen Ringelementen a_0 , für die das von a_0 erzeugte zweiseitige Ideal (a_0) nur aus F -regulären Elementen b_0 besteht. Dabei heißt ein Element b_0 im Sinne von SMILEY F -regulär, wenn es zu dem von der Menge $\{b_0 x - x + y b_0 - y; x, y \in a_0\}$ in a_0 erzeugten zweiseitigen Ideal $F(b_0) = (\{b_0 x - x + y b_0 - y; x, y \in a_0\})$ gehört. Ein Ring heißt halbeinfach (im Sinne von SMILEY), wenn $N(a_0) = 0$ ist. Den Zusammenhang der halbeinfachen Ringe mit den einfachen Ringen mit Einselementen kann man den folgenden beiden Sätzen entnehmen, von denen der erste auf BROWN und MCCOY [3] zurückgeht.

Satz 8. Der Restklassenring a_0/i ist dann und nur dann einfacher Ring mit Einselement, wenn i ein in a_0 großes und modulares Ideal ist; dabei heißt i groß und modular, wenn es in a_0 ein Element e gibt derart, daß zwar das Ideal $F(e)$ in i liegt aber nicht e selbst (modular), und daß ferner jedes echte Oberideal von i das Element e enthält (groß).

Beweis. „Dann“: Beim natürlichen Homomorphismus von a_0 auf a_0/i wird e abgebildet auf $\bar{e} \neq \bar{0}$, da $e \notin i$. Aus $\overline{F(e)} = \bar{0}$ folgt insbesondere $\bar{e} \cdot \bar{x} - \bar{x} = \bar{0}$ und $\bar{y} \cdot \bar{e} - \bar{y} = \bar{0}$; also ist $\bar{e}$ Einselement in a_0/i . Sei b das Urbild eines Ideales $\bar{b} \neq \bar{0}$ in a_0/i , also b echtes Oberideal von i und damit $e \in b$; demnach enthält $\bar{b}$ das Einselement $\bar{e}$ von a_0/i , was die Einfachheit von a_0/i nach sich zieht. – „Nur dann“: e sei ein Urbild des Einselementes $\bar{e}$ von a_0/i beim obigen Homomorphismus. Wegen $\overline{F(e)} = F(\bar{e}) = \bar{0}$ ist zwar $F(e) \subseteq i$, aber wegen $e \notin i$ ist erst recht nicht e in $F(e)$, also ist i ein in a_0 modulares Ideal. Es ist aber auch groß, denn i hat überhaupt kein echtes Oberideal, da a_0/i nach Voraussetzung ein einfacher Ring ist. Q. e. d.

Satz 9 (SMILEY). Das Radikal $N(a_0)$ ist der Durchschnitt $D = \cap m_i$ aller großen und modularen Ideale m_i von a_0 , wobei die einzelnen m_i durch ihre Indizes i unterschieden seien.

Beweis (vgl. [3]). 1. Aus $a \notin N(a_0)$ folgt für ein passendes $b \in (a)$, daß $b \notin F(b)$. Das damit modulare Ideal $F(b)$ läßt sich nach dem Lemma von ZORN vergrößern zu einem großen und modularen Ideal m_i , in dem b zwar ebenfalls nicht liegt, dessen sämtliche echten Oberideale aber b enthalten. Läge nun a in D , so auch in diesem m_i , also müßte auch $b \in (a) \subseteq m_i$ liegen q. e. a. Daher zieht a in D nach sich $a \in N(a_0)$. 2. Der Beweis dafür, daß

aus $a \in D$ folgt $a \in N(a_0)$, beruht auf der nach BROWN und MCCOY für alle F -Abbildungen charakteristischen Eigenschaft

$$(P) \quad F(a + b) \subseteq F(a) + (b),$$

der natürlich auch die obige zum Radikal von SMILEY führende Zuordnung $a \rightarrow F(a)$ genügt. Ausführung: Wegen $a \in D$ gibt es ein großes und modulares Ideal m_i , das a nicht enthält. Sei nun e_i ein Element mit $e_i \in m_i$, aber $F(e_i) \subseteq m_i$ und derart, daß e_i in jedem echten Oberideal von m_i liegt. Dann gilt $e_i \in (a, m_i)$, etwa $e_i = b + m$, wobei $b \in (a)$ und $m \in m_i$. Läge nun $a \in N(a_0)$, dann wäre b regulär, also $b \in F(b)$ und nach (P) daher $e_i - m \in F(e_i - m) \subseteq F(e_i) + (m)$. Da m und $F(e_i)$ in m_i liegen, würde $e_i \in m_i$ folgen, q. e. a., also $a \in N(a_0)$, wodurch zusammen mit 1. $D = N(a_0)$ bewiesen ist.

Korollar. Das Radikal $N(a_0)$ ist als Durchschnitt der zweiseitigen Ideale m_i ein zweiseitiges Ideal in a_0 .

Den Sätzen 8 und 9 kann man nun entnehmen, daß ein halbeinfacher Ring a_0 einer subdirekten Summe von einfachen Ringen r_i mit Einselementen isomorph ist. Denn aus der Halbeinfachheit, $N(a_0) = 0$, folgt, daß der Durchschnitt aller m_i gleich 0 ist. Einem Element a_0 aus a_0 werde nun als ι -Komponente die Restklasse a_{0i} von a_0 modulo m_i zugeordnet, wobei die Indizes ι eine Menge Ω bilden. a_0 ist dabei durch seine Komponenten a_{0i} eindeutig bestimmt, weil $\cap_i m_i = 0$ ist. Schließlich tritt jede Restklasse r_i von a_0/m_i als ι -Komponente von mindestens einem a_0 aus a_0 wirklich auf. Daher ist a_0 subdirekte Summe der Restklassenringe $r_i = a_0/m_i$. Jeder dieser Ringe ist nach Satz 8 ein einfacher Ring mit Einselement. — Daß auch umgekehrt eine subdirekte Summe a_0 von einfachen Ringen r_i mit Einselementen e_i ein halbeinfacher Ring ist, ersieht man leicht daraus, daß beim komponentenweisen Rechnen die ι -Komponente a_{0i} eines Elementes a_0 des Radikales $N(a_0)$ im Radikal $N(r_i)$ liegt und daß ferner $N(r_i) = 0$ ist, weil $N(r_i)$ als zweiseitiges Ideal nur gleich 0 oder gleich r_i sein kann, $N(r_i) = r_i$ aber wegen $e_i \notin F(e_i) = 0$ ausgeschlossen ist. Damit ist folgender Satz von SMILEY bewiesen:

Satz 10. Ein Ring a_0 ist dann und nur dann subdirekte Summe einfacher Ringe mit Einselementen, wenn sein nach SMILEY gebildetes Radikal $N(a_0) = 0$ ist.

Schließlich benötigt man noch die für Radikale übliche Eigenschaft, daß der Restklassenring von a_0 nach seinem Radikal $N(a_0)$ halbeinfach ist:

$$\text{Satz 11. } N(a_0/N(a_0)) = 0.$$

Der Beweis (vgl. BROWN und MCCOY [2]) beruht darauf, daß bei Restklassenbildung die Zuordnung $a \rightarrow F(a)$ ihre Eigenschaften behält. Es sei nämlich a ein Urbild der Restklasse $\bar{a}$ aus $N(a_0/N(a_0))$ beim natürlichen Homomorphismus von a_0 auf $a_0/N(a_0)$. Für jedes $b \in (a)$ gilt $\bar{b} \in (\bar{a})$, also $\bar{b} \in F(\bar{b})$. Folglich ist $b = f(b)$ modulo $N(a_0)$, wobei $f(b)$ in $F(b)$ liegt. $b - f(b) \in N(a_0)$ zieht nun wegen (P) nach sich $b - f(b) \in F(b - f(b)) \subseteq F(b) + (f(b)) \subseteq F(b)$, und damit $b \in F(b)$. Aus der damit bewiesenen Regularität aller Elemente b des Ideales (a) folgt $a \in N(a_0)$ und daraus wieder $\bar{a} = \bar{0}$ oder $N(a_0/N(a_0)) = 0$.

Mit a_0 ist nun nach Satz 3 auch $a_0/N(a_0)$ ass. Aufl., woraus, zusammen mit der Halbeinfachheit von $a_0/N(a_0)$, aus Satz 7 folgt, daß $a_0/N(a_0)$ sogar assoziativ ist. Dies bedingt nun nach Satz 5, daß a_1 in $N(a_0)$ enthalten ist. Da a_2 gegenüber a_1 dieselbe Rolle spielt wie a_1 gegenüber a_0 usw. ergibt sich der

Satz 12: Für die a_0 auflösende Minimalkette $a_0 > a_1 > \dots > a_n = 0$ gilt $a_{k+1} \subseteq N(a_k)$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Korollar. Der Restklassenring eines ass. Aufl. Ringes a_0 nach seinem Radikal ist ein assoziativer Ring.

Bemerkung. Ein zweiter, rechnerischer Beweis wird am Ende dieses Paragraphen gebracht.

Nach dem obigen Korollar konzentriert sich das Interesse auf das Radikal eines ass. Aufl. Ringes a_0 . Man kann es angeben nach folgendem

Satz 13: Das Radikal $N(a_0)$ eines ass. Aufl. Ringes a_0 ist das Urbild des Radikales $N(a_0/a_1)$ des assoziativen Restklassenringes a_0/a_1 beim natürlichen Homomorphismus von a_0 auf a_0/a_1 .

Beweis. 1. Sei $a_0 < N(a_0)$ und $\bar{b}_0 < (\bar{a}_0)$, wobei der Querstrich die Restklassenbildung modulo a_1 bezeichnet. Da nach Satz 12 a_1 in $N(a_0)$ liegt, gehört auch b_0 zu $N(a_0)$. Aus $b_0 < F(b_0)$ folgt $\bar{b}_0 < F(\bar{b}_0)$. Die damit bewiesene Regularität von allen $\bar{b}_0$ aus $(\bar{a}_0)$ in a_0/a_1 zieht $\bar{a}_0 < N(a_0/a_1)$ nach sich.

2. Sei a_0 Urbild von $\bar{a}_0$ aus $N(a_0/a_1)$. Also liegen alle $\bar{b}_0$ aus $(\bar{a}_0)$ in ihren $F(\bar{b}_0)$. Daraus folgt $b_0 \equiv f(b_0)$ modulo a_1 für ein passendes Element $f(b_0)$ aus $F(b_0)$ oder $b_0 - f(b_0) < a_1$. Nach Satz 12 liegt a_1 in $N(a_0)$, also ist weiter nach (P) $b_0 - f(b_0) < F(b_0 - f(b_0)) \subseteq F(b_0) + (f(b_0)) \subseteq F(b_0)$ und damit $b_0 < F(b_0)$ für alle $b_0 < (a_0)$, also gilt $a_0 < N(a_0)$. Q. e. d.

Korollar. Wenn der Ring a_0 ass. Aufl. und a_0/a_1 halbeinfach ist, dann ist sein Radikal $N(a_0)$ genau gleich dem von seinen Assoziatoren erzeugten Ideal a_1 .

Bemerkungen. Der Satz 13 und sein Korollar sind auch deshalb interessant, weil für einen assoziativen Ring a und ein beliebiges Ideal i in a bekanntlich aus $N(a/i) = 0$ und $N(i) = 0$ folgt $N(a) = 0$. Das Radikal braucht kein Radikalring zu sein, wie aus der Erweiterungstheorie in § 4 folgen wird.

Für assoziativ nicht auflösbare Ringe a_0 kann man ebenfalls das von den Assoziatoren von a_0 erzeugte Ideal a_1 bilden und in a_1 wieder a_2 usw. Nur endet dann die Kette der a_k nicht mit 0, sondern von einem gewissen t ab ist $0 \neq a_t = a_{t+1} = \dots$. Es sei ausdrücklich bemerkt, daß in diesem Fall die Sätze 12 und 13 keineswegs richtig zu sein brauchen; ein Gegenbeispiel bildet jeder einfache Ring a_0 mit Einselement e , der nicht assoziativ ist, z.B. das CAYLEY-System. Das Radikal $N(a_0)$ ist dann nämlich nach dem Korollar von Satz 7 gleich 0. Dagegen ist das Ideal $a_1 = a_0$, weil aus $a_1 = 0$ die Assoziativität von a_0 folgen würde. Daher liegt, entgegen Satz 12, $a_1 = a_0$ nicht in $N(a_0) = 0$. Ferner ist das Urbild von $N(a_0/a_1) = 0$ beim natürlichen Homomorphismus $a_0 \rightarrow a_0/a_1$ gleich a_0 , also, entgegen Satz 13, nicht gleich $N(a_0)$. —

Zur Erläuterung der für diesen ganzen Paragraphen fundamentalen Tatsache, daß die Assoziatoren eines ass. Aufl. Ringes in seinem Radikal liegen

(Satz 12), ist es vielleicht nützlich, noch einen zweiten Beweis zu geben, der rein rechnerisch von den Assoziatoren direkt nachweist, daß sie den für die Elemente des Radikales nach SMILEY charakteristischen Relationen genügen. Das scheint auch deshalb berechtigt, weil der Verfasser durch die im § 5 behandelten Beispiele aus der algebraischen Geometrie auf die Vermutung $\alpha_1 \subseteq N(\alpha_0)$ geführt wurde und diese dann zunächst rechnerisch, wie im folgenden beschrieben, bewiesen hat. Erst hinterher hat der Verfasser gesehen, daß es eleganter ist, von der Darstellung eines halbeinfachen Ringes als subdirekte Summe auszugehen, wie es der obige Beweis von Satz 12 tut.

Zur Vereinfachung der Rechnung sei vorausgesetzt, daß α_0 auflösbar ist bereits von der Länge zwei: $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 = 0$. Damit $[a, b, c]$ in $N(\alpha_0)$ liegt, muß nach der Definition des Radikales von SMILEY jedes Element g des von $[a, b, c]$ erzeugten zweiseitigen Ideales $[a, b, c]$ regulär sein, d.h. g in dem Ideal $F(g) = (\{g x \quad x + y g - y; \quad x, y \in \alpha_0\})$ liegen. Zunächst werde $[a, b, c] \in F([a, b, c])$ gezeigt. Das folgt daraus, daß ein Assoziator distributiv ist in jeder seiner drei Stellen. Es ist nämlich

$$[[a, b, c] a - a, b, c] = (([a, b, c] a - a) b) c - ([a, b, c] a - a) \cdot (b c)$$

ein Element des Ideales $F([a, b, c])$ und damit

$$\begin{aligned} [a, b, c] &= [[a, b, c] a, b, c] && \text{mod } F([a, b, c]) \\ &= [[a, b, c] a, [a, b, c] b, c] && \text{mod } F([a, b, c]) \\ &= [[a, b, c] a, [a, b, c] b, [a, b, c] c] && \text{mod } F([a, b, c]). \end{aligned}$$

Andererseits liegen $[a, b, c] a$, $[a, b, c] b$, $[a, b, c] c$ in dem von den Assoziatoren von α_0 erzeugten Ideal α_1 , und, da dieses nach Voraussetzung ein assoziativer Ring ist ($\alpha_2 = 0$), muß der auf der rechten Seite der letzten Kongruenz gebildete Assoziator gleich 0 sein, und damit $[a, b, c]$ in $F([a, b, c])$ liegen. — Die Regularität auch der übrigen Elemente g von $([a, b, c])$ läßt sich nach demselben Prinzip beweisen: Jedes Element von $([a, b, c])$ entsteht aus $[a, b, c]$ durch Anwendung einer Summe P von einer oder mehreren hintereinander ausgeführten Links- oder Rechtsmultiplikationen. Für den Operator P und $[a, b, c]$ gilt nun, ähnlich wie oben, $[[a, b, c] P] a - a, b, c] P \in F([a, b, c] P)$, und damit wieder

$$\begin{aligned} [a, b, c] P &= [[a, b, c] P] a, b, c] P && \text{mod } F([a, b, c] P) \\ &= [[a, b, c] P] a, ([a, b, c] P] b, c] P && \text{mod } F([a, b, c] P) \\ &= [[a, b, c] P] a, ([a, b, c] P] b, [a, b, c] P] c] P && \text{mod } F([a, b, c] P). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der letzten Kongruenz steht das Ergebnis der Anwendung von P auf den Assoziator dreier Elemente des Ideales α_1 , also auf 0. Daraus folgt die Behauptung $[a, b, c] P \in F([a, b, c] P)$. Q. e. d. Dieser Beweis des Satzes 12 zeigt, daß die Beziehung $\alpha_1 \subseteq N(\alpha_0)$ für ass. aufl. Ringe nicht nur dann gilt, wenn $N(\alpha_0)$ das Radikal im Sinne von SMILEY ist, d.h., wenn der

Radikalbildung die Zuordnung $g \rightarrow F(g) = (\{gx - x + yg - y; x, y \in \mathfrak{a}_0\})$ zugrunde liegt, sondern auch dann, wenn man von $g \rightarrow F'(g) = (\{gx - x; x \in \mathfrak{a}_0\})$ ausgeht. Auch diese Zuordnung hat die für eine F -Abbildung im Sinne von BROWN und MCCOY charakteristische Eigenschaft (P), so daß sich mit ihr ein F' -Radikal $N'(\mathfrak{a}_0)$ bilden läßt. Auch für dieses ist nach dem Obigen der folgende Satz bewiesen:

Satz 14. Für das F' -Radikal $N'(\mathfrak{a}_0)$ eines auflösbaren Ringes $\mathfrak{a}_0$ gilt $\mathfrak{a}_1 \subseteq N'(\mathfrak{a}_0)$, wobei dem F' -Radikal die Abbildung $\mathfrak{a}_0 \rightarrow F'(\mathfrak{a}_0) = (\{a_0x - x; x \in \mathfrak{a}_0\})$ zugrunde liegt.

Offen ist noch die Frage, ob die Relation $\mathfrak{a}_1 \subseteq N''(\mathfrak{a}_0)$ auch richtig ist für das Radikal $N''(\mathfrak{a}_0)$ von JACOBSON [5], [2], das von der Abbildung $\mathfrak{a}_0 \rightarrow F''(\mathfrak{a}_0) = (\{a_0x - x, x \in \mathfrak{a}_0\})^{(n)}$ ausgeht, wobei jetzt aber $(\dots)^{(n)}$ das von den Elementen $a_0x - x$ erzeugte Rechtsideal bedeutet.

§ 3. Die Automorphismengruppe.

Die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ eines ass. Aufl. Ringes $\mathfrak{a}_0$ läßt sich auf die Automorphismengruppen $\mathfrak{g}_k$ der assoziativen Restklassenringe $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ zurückführen gemäß dem folgenden

Satz 15: $\mathfrak{a}_0$ sei ass. Aufl., und in der Minimalkette $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{a}_n = 0$ enthalte keiner der Restklassenringe $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, universelle Annihilatoren. Dann ist die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{a}_0$ isomorph einer Untergruppe des freien direkten Produktes der Automorphismengruppe $\mathfrak{g}_k$ der assoziativen Ringe $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Beweis. 1. Ein Assoziator $[\mathfrak{a}_0, b_0, c_0]$ geht bei einem Automorphismus τ von $\mathfrak{a}_0$ wieder in einen Assoziator über, also wird das ganze von den Assoziatoren erzeugte Ideal $\mathfrak{a}_1$ bei τ auf sich abgebildet. $\mathfrak{a}_1$ ist demnach ein gegenüber allen Automorphismen von $\mathfrak{a}_0$ zulässiges Ideal in $\mathfrak{a}_0$. Da ein Automorphismus von $\mathfrak{a}_0$ einen Automorphismus von $\mathfrak{a}_1$ induziert, ist auch $\mathfrak{a}_2$ gegenüber allen τ aus $\mathfrak{G}$ zulässig usw. Daraus folgt, daß der Automorphismus τ von $\mathfrak{a}_0$ in den Restklassenringen $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ Automorphismen τ_k induziert. — Von dem Produkt $\sigma \cdot \tau$ zweier Automorphismen σ und τ aus $\mathfrak{G}$ wird natürlich in $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ das Produkt $\sigma_k \cdot \tau_k$ aus $\mathfrak{g}_k$ induziert. — Zum Beweis des Satzes ist nur noch zu zeigen, daß zwei Automorphismen σ und τ aus $\mathfrak{G}$ nur dann in allen $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ denselben Automorphismus induzieren, wenn $\sigma = \tau$ ist; oder anders ausgedrückt, daß nur der identische Automorphismus ε von $\mathfrak{a}_0$ in allen $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ den identischen Automorphismus induziert. Beweis durch vollständige Induktion nach i in den $\mathfrak{a}_{n-i}$, $i = 1, 2, \dots, n$: Der Automorphismus τ aus $\mathfrak{G}$ induziere in allen Restklassenringen den identischen Automorphismus $\tau_k = \varepsilon_k$. Die Verankerung ($i = 1$) liegt bereits in $\mathfrak{a}_{n-1} = \mathfrak{a}_{n-1}/\mathfrak{a}_n$, da $\mathfrak{a}_n = 0$ ist. Induktionsannahme: In $\mathfrak{a}_{n-i}$ induziere τ den identischen Automorphismus. Nach Voraussetzung induziert τ in $\mathfrak{a}_{n-i-1}/\mathfrak{a}_{n-i}$ ebenfalls den identischen Automorphismus $\tau_{n-i-1} = \varepsilon_{n-i-1}$. Nun sei a_{n-i-1} ein Element aus $\mathfrak{a}_{n-i-1}$. Dann folgt aus $\tau_{n-i-1} \{a_{n-i-1}\} = \bar{a}_{n-i-1}$, daß $\tau \{a_{n-i-1}\} = a_{n-i-1} + a_{n-i}$ ist, wobei der Querstrich die Restklassenbildung modulo $\mathfrak{a}_{n-i}$ bedeutet und a_{n-i} ein

zu a_{n-i-1} und τ passendes Element aus a_{n-i} ist. Zu zeigen ist $a_{n-i} = 0$. Es sei x_{n-i} ein beliebiges Element aus a_{n-i} . Dann liegt das Produkt $a_{n-i-1} \cdot x_{n-i}$ im Ideal a_{n-i} , woraus nach Induktionsannahme $\tau \{a_{n-i-1} \cdot x_{n-i}\} = a_{n-i-1} \cdot x_{n-i}$ folgt. Andererseits ist aber, da τ ein Automorphismus von a_0 ist, $\tau \{a_{n-i-1} \cdot x_{n-i}\} = \tau \{a_{n-i-1}\} \cdot \tau \{x_{n-i}\} = (a_{n-i-1} + a_{n-i}) \cdot x_{n-i} = a_{n-i-1} \cdot x_{n-i} + a_{n-i} \cdot x_{n-i}$. Diese beiden Darstellungen für $\tau \{a_{n-i-1} \cdot x_{n-i}\}$ ergeben sogleich $a_{n-i} \cdot x_{n-i} = 0$ für alle x_{n-i} aus a_{n-i} . Daraus kann man auf die Behauptung $a_{n-i} = 0$ schließen, wenn der folgende Hilfssatz gezeigt ist, den man nur auf $b_0 = a_{n-i}$ anzuwenden braucht:

Hilfssatz. Wenn in der Idealkette $b_0 > b_1 > \dots > b_s = 0$ eines beliebigen Ringes b_0 keiner der Restklassenringe b_j/b_{j+1} , $j = 0, 1, \dots, s-1$, universelle Annihilatoren enthält, dann gibt es auch in b_0 keine universelle Annihilatoren.

Beweis durch vollständige Induktion nach s . Die Verankerung ($s = 1$) ist trivial. Induktionsannahme: Der Satz sei richtig für eine Kette von der Länge $s-1$. Demnach enthält unter den Voraussetzungen des Satzes der Ring b_1 keine universelle Annihilatoren. Nun sei $b_0 \cdot x_0 = 0$ für ein Element $b_0 < b_0$ und alle $x_0 < b_0$. Da b_0/b_1 keine universelle Annihilatoren hat, muß b_0 in b_1 liegen. Wegen $b_0 \cdot x_0 = 0$ gilt aber erst recht $b_0 \cdot x_1 = 0$ für alle $x_1 < b_1$. Daraus folgt $b_0 = 0$, q. e. d.

§ 4. Erweiterungstheorie.

Der Satz 15 des letzten Paragraphen legt die Frage nahe, wie weit der Ring a_0 durch die Restklassenringe a_k/a_{k+1} festgelegt ist. Man kann diese Frage mit einem Existenzproblem verbinden: Ist es immer möglich, zu n vorgegebenen assoziativen Ringen $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{n-1}$ einen ass. Aufl. Ring a_0 zu finden, dessen Minimalkette $a_0 > a_1 > \dots > a_n = 0$ den Isomorphiebedingungen $a_k/a_{k+1} \cong \mathfrak{A}_k$ genügt, und wie weit ist a_0 durch die $\mathfrak{A}_k$ bestimmt?

Die Problemstellung ist analog einer bekannten Frage aus der Gruppentheorie; jedoch ist jetzt die Konstruktion des Ringes a_0 leichter als die entsprechende Aufgabe in der Erweiterungstheorie der Gruppen, weil man nur dafür zu sorgen braucht, daß alle Elemente aus a_1 sich durch Assoziatoren von Elementetripeln aus a_0 erzeugen lassen (daß also das Assoziativgesetz in a_0 „hinreichend schlecht“ erfüllt wird), man aber nicht gezwungen ist, die Multiplikation in a_0 darüber hinaus noch einem tiefliegenden Gesetz (wie in der Gruppentheorie der Assoziativität der Multiplikation) zu unterwerfen. Auf das Distributivgesetz muß man allerdings achten. — Die Hauptschwierigkeit bei der Konstruktion von a_0 liegt darin, daß man sich nicht mit den obigen allgemeinen Bemerkungen begnügen kann, sondern die Multiplikation in a_0 wirklich angeben muß. Wenn aber die Ringe $\mathfrak{A}_k$ Algebren endlichen Ranges über einen gemeinsamen Grundkörper K sind, läßt sich a_0 als Algebra über K mit Hilfe einer Multiplikationstabelle konstruieren, die aus den Multiplikationstabellen der $\mathfrak{A}_k$ zusammengesetzt ist; es gilt nämlich der folgende

Satz 16: Vorgegeben seien über einem gemeinsamen Grundkörper K , von beliebiger Charakteristik, n assoziative Algebren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{n-1}$ mit den

Rängen r_k über K . Kein $\mathfrak{A}_k$ bestehe nur aus universellen Annihilatoren. Dann gibt es eine Algebra $\mathfrak{a}_0$ über K vom Range $r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1}$, die ass. Aufl. ist durch eine Minimalreihe $\mathfrak{a}_0 > \mathfrak{a}_1 > \dots > \mathfrak{a}_n = 0$, deren Restklassenringe $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_{k+1}$ isomorph sind zu den $\mathfrak{A}_k$.

Vor dem Beweis sei noch bemerkt, daß wegen der komplizierten Bezeichnungen nur der Fall $n=2$ im folgenden vorgeführt wird, der bereits alles Wesentliche zeigt. — Daß man eine Voraussetzung von der Art „Kein $\mathfrak{A}_k$ bestehe nur aus universellen Annihilatoren“ machen muß, zeigt das Beispiel: $n=2$, $\mathfrak{A}_0$ gleich Nullring. In diesem Falle müßte $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1 = 0$, also $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_0$ sein, was der wegen $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1/\mathfrak{a}_2 \cong \mathfrak{A}_1$ vorausgesetzten Assoziativität von $\mathfrak{a}_1$ widersprechen würde. — Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die beim Beweis geschilderte Konstruktion von $\mathfrak{a}_0$ so viele willkürliche Bausteine enthält, daß im allgemeinen gar keine Rede davon sein kann, daß $\mathfrak{a}_0$ durch die $\mathfrak{A}_k$ eindeutig bestimmt ist.

Beweis von Satz 16. Eine Basis von $\mathfrak{A}_1$ über K bestehe aus den Elementen $a_{11}, \dots, a_{1r_1}$. Nach Voraussetzung gibt es in $\mathfrak{A}_0$ ein Element a_0 , das nicht absoluter Nullteiler ist. 1. Fall. Es gibt in $\mathfrak{A}_0$ ein von a_0 linear unabhängiges Element b_0 derart, daß $a_0 \cdot b_0 = c_0 \neq 0$ ist, es ist also c_0 linear unabhängig von a_0 oder b_0 . Dann werde $\mathfrak{a}_0$ als Algebra über K erklärt mit einer Basis $a_{01}, \dots, a_{0r_0}, a_{11}, \dots, a_{1r_1}$ und folgender Multiplikation: $a_{1i} \cdot a_{1j}$ wie in $\mathfrak{A}_1$. Falls a_0 und c_0 linear unabhängig sind, ergänze man sie zu einer Basis von $\mathfrak{A}_0$. Mit der Zuordnung $a_{01} \leftrightarrow a_0, a_{02} \leftrightarrow c_0, \dots$ werde die Multiplikation der a_{0i} so wie in $\mathfrak{A}_0$ erklärt. Die Produkte der a_{0i} mit den a_{1j} definiere man durch $a_{1j} \cdot a_{01} = 0, a_{1j} \cdot a_{02} = -a_{1j}, j = 1, \dots, r_1$. Bei der obigen Zuordnung sei mit a_{00} das Bild des Elementes b_0 aus $\mathfrak{A}_0$ bezeichnet. Dann wird $[a_{1j}, a_{01}, a_{00}] = a_{1j}$, da $a_{01} \cdot a_{00} = a_{02}$ ist. — Die Behandlung des zweiten Falles (b_0 und c_0 linear unabhängig) unterscheidet sich von der des ersten nur durch $a_{01} \leftrightarrow b_0, a_{02} \leftrightarrow c_0, a_{00} \leftrightarrow a_0, a_{01} \cdot a_{1j} = 0, a_{02} \cdot a_{1j} = a_{1j}, [a_{00}, a_{01}, a_{1j}] = a_{1j}$. — Die übrigen Produkte der a_{0i} mit den a_{1j} erkläre man irgendwie als Elemente des von den a_{1j} über K erzeugten Teilringes $\mathfrak{a}_1$, der dabei natürlich ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{a}_0$ wird. Offenbar ist $\mathfrak{a}_1 \cong \mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}_1 \cong \mathfrak{A}_0$.

2. Fall. Von 0 verschieden sind in $\mathfrak{A}_0$ höchstens Quadrate $a_0^2 = c_0 \neq 0$, darunter eines mit c_0 linear unabhängig von a_0 . Dann ergänze man a_0 und c_0 zu einer Basis von $\mathfrak{A}_0$ und definiere nach der Zuordnung $a_{01} \leftrightarrow a_0, a_{02} \leftrightarrow c_0, \dots$ die Produkte der a_{0i} unter sich und der a_{1j} unter sich wie in $\mathfrak{A}_0$ bzw. $\mathfrak{A}_1$. Ferner definiere man $a_{01} \cdot a_{1j} = 0, a_{02} \cdot a_{1j} = a_{1j}$ und erhält wegen $a_{01}^2 = a_{02}$ in den Assoziatoren $[a_{01}, a_{01}, a_{1j}] = a_{1j}$ die Basis eine Untermoduls $\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{a}_0$. Damit $\mathfrak{a}_1$ Ideal in $\mathfrak{a}_0$ wird, erkläre man die restlichen Produkte der a_{0i} mit den a_{1j} in $\mathfrak{a}_1$ und im übrigen beliebig.

3. Fall. Für alle von 0 verschiedenen Quadrate gilt $a_0^2 = \varrho a_0, \varrho \in K$. Man ordne zu: $a_{01} \leftrightarrow a_0$, und definiere $a_{01} \cdot a_{1j} = \sigma a_{1j}, \sigma \in K$. Wegen $[a_{01}, a_{01}, a_{1j}] = (\varrho - \sigma) \sigma a_{1j}$ setze man $\sigma \neq 0$ und $\sigma \neq \varrho$ in K und erkläre im übrigen die Produkte in dem bereits in den ersten beiden Fällen angewandten Sinne. Das geht aber offenbar nur dann, wenn der Grundkörper K nicht gleich dem

Primkörper $C(2)$ der Charakteristik 2 ist. Aber auch in diesem letzten Falle kommt man mit folgenden Definitionen durch: a) Wenn der Rang $r_1 = [\mathfrak{A}_1 : C(2)] = 2s$, also eine gerade Zahl ist, erkläre man

$$\begin{aligned} a_{01} \cdot a_{1, 2l} &= 0 & a_{1, 2l} \cdot a_{01} &= a_{1, 2l-1}, \\ a_{01} \cdot a_{1, 2l-1} &= a_{1, 2l}, & a_{1, 2l-1} \cdot a_{01} &= 0, \end{aligned}$$

$l = 1, 2, \dots, s$, und erhält, wegen $\varrho = 1$, also $a_{01}^2 = a_{01}$, in den Assoziatoren $[a_{01}, -a_{1, 2l}, a_{01}] = a_{1, 2l}$, $[a_{01}, a_{1, 2l-1}, a_{01}] = a_{1, 2l-1}$ wieder eine Basis von $\mathfrak{A}_1$. — b) Wenn $r_1 = 2s + 1$ ist, $s = 0, 1, \dots$, erkläre man die Produkte von a_{01} mit den $a_{1, 2l}$ und den $a_{1, 2l-1}$ für $l = 1, 2, \dots, s$ wie unter a), und für das letzte Element $a_{1, 2s+1}$ erkläre man $a_{01} \cdot a_{1, 2s+1} = 0$, $a_{1, 2s+1} \cdot a_{01} = a_{1, 2s+1}$, jetzt aber a_{01}^2 nicht gleich a_{01} , sondern $a_{01}^2 = a_{01} + a_{1, 2s+1}$. Dann erhält man in $\mathfrak{A}_{1, 2s+1} = [a_{01}, a_{01}, a_{01}]$ auch noch das letzte Basiselement von $\mathfrak{A}_1$ als Assoziator. Q. e. d.

§ 5. Beispiele aus der algebraischen Geometrie.

Bereits in der Einleitung wurde ein Beispiel eines ass. Aufl. Ringes mit Hilfe einer ebenen algebraischen Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt gegeben. Es läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: $A, B, C, \dots$ seien über dem Grundkörper k irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten (alg. Mf.) im N -dimensionalen Raum S^N . Sie brauchen nicht alle die gleiche Dimension zu haben. Aus jeweils endlich vielen unter ihnen seien mit rationalen Zahlen $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ die gemischtdimensionalen Zyklen $\alpha A + \beta B + \dots + \gamma C$ zusammengesetzt. Da zwei verschiedene alg. Mfn. dabei als linear unabhängig über dem Körper K der rationalen Zahlen angesehen werden, bilden diese Zyklen einen Modul unendlichen Ranges über K . Aus ihm läßt sich ein Ring, genauer eine Algebra $\mathfrak{a}_0$ über K , dadurch machen, daß man die Produkte $A \cdot B$ der Basiselemente erklärt. Nun besteht, wie in der algebraischen Geometrie gezeigt wird, der Durchschnitt $A \cap B$ aus endlich vielen isolierten Komponenten $D_1, D_2, \dots, D_s$. Jeder von ihnen läßt sich eine natürliche Zahl als Schnittmultiplizität $\mu(A \cdot B, D)$ zuordnen, die gewisse Eigenschaften besitzt, wie P. SAMUEL [6], in Verfolgung der Ideen von C. CHEVALLEY [4], und der Verfasser [1], unter Benutzung der von A. WEIL [9] für eigentliche Komponenten aufgestellten Multiplizitätstheorie, gezeigt haben. Dabei ist jedoch hervorzuheben, daß nicht alle Eigenschaften der Multiplizität, die für eigentliche Komponenten richtig sind, auch für uneigentliche Schnittkomponenten gelten. Insbesondere gilt für μ nicht mehr das sog. Assoziativgesetz (vgl. [1], § 5). Es läßt sich unter Benutzung des oben konstruierten Moduls der gemischtdimensionalen Zyklen folgendermaßen aussprechen: Als Produkt $A \cdot B$ zweier alg. Mfn., also zweier Basiselemente des Moduls, definiere man $A \cdot B = \sum_{i=1}^s \mu(A \cdot B, D_i) D_i$, wenn $A \cap B$ die alg. Mfn. $D_1, \dots, D_s$ als isolierte Komponenten besitzt. Weil die $A, B, \dots$ linear unabhängig sind, ist damit eine Algebra $\mathfrak{a}_0$ über dem Körper K der rationalen Zahlen erklärt. Sie sei als Ring der algebraischen Mannigfaltigkeiten

des S^N bezeichnet. Für ihre Multiplikation gilt nicht durchweg das Assoziativgesetz, wie bereits das in der Einleitung behandelte Beispiel zeigt. Wohl aber gilt es für solche Produkte $A \cdot B$, bei denen alle D_i eigentliche Schnittkomponenten sind (A. WEIL [9]).

Unter die alg. Mfn. des N -dimensionalen Raumes ist auch $S = S^N$ selbst zu rechnen, und natürlich ist $1S$ das Einselement von a_0 .

Satz 17. *Der Ring a_0 der alg. Mfn. des S^N ist ass. Aufl. von der Länge N .*

Beweis. Da in $A \cap B = D_1 \cup D_2 \dots \cup D_s$ gilt $\text{Dim } D_i \leq \text{Min} \{\text{Dim } A, \text{Dim } B\}$, bilden diejenigen Elemente aus a_0 , die aus alg. Mfn. der Dimensionen kleiner oder gleich $N-2$ linear kombiniert sind, ein Ideal a_1 in a_0 . In a_1 wiederum bilden diejenigen Linearkombinationen a_2 , in denen nur alg. Mfn. A der $\text{Dim } A \leq N-3$ auftreten, ein Ideal a_2 usw., bis schließlich $a_N = 0$ erreicht ist. — Übrigens sind alle a_k Ideale auch in a_0 . — Behauptet wird, daß diese a_k die a_0 auflösende Minimalkette im Sinne von Satz 5 bilden. Dazu werde zunächst die Assoziativität des Restklassenringes a_0/a_1 gezeigt. Nach der Multiplizitätstheorie sind die Basiselemente sämtlich idempotent, da $\mu(A \cdot A, A) = 1$ ist. Wegen $\text{Dim } D_i < \text{Min} \{\text{Dim } A, \text{Dim } B\}$, falls A und B beide ungleich S und voneinander verschieden sind, ist $1A \cdot 1B \equiv 0 \pmod{a_1}$. Damit ergibt sich, daß a_0/a_1 eine Algebra über K ist mit einer Basis, die aus dem Einselement und im übrigen aus lauter orthogonalen Idempotenten besteht. Natürlich zieht das die Assoziativität von a_0/a_1 nach sich. — Analog erweist sich a_1/a_2 als Algebra über K mit einer aus orthogonalen Idempotenten bestehenden Basis usw. — Also ist a_0 auflösbar von einer Länge, die höchstens gleich N ist. Daß die a_0 auflösende Kette der a_k sich nicht mehr verkürzen läßt, folgt nun einfach daraus, daß es für $l \geq 1$ zu jeder vorgegebenen alg. Mf. A der $\text{Dim } A = N-l-1$ eine alg. Mf. B der $\text{Dim } B = N-l$ gibt, die A als singulären Bestandteil enthält. Dann ist $\mu(A \cdot B, A) \geq 2$, und wegen $[1A, 1B, 1B] = \mu^2 A - \mu A = \mu(\mu-1)A$ ist A Assoziator eines Elementetripels aus a_{l-1} . Nun besteht a_k aus den Linearkombinationen von alg. Mfn. der Dimensionen l , $l \leq N-k-1$. Also ist nach dem Vorangegangenen jedes Basiselement aus a_k Assoziator eines Tripels von Elementen, die in a_{k-1} liegen. Da überdies a_k Ideal in a_{k-1} ist, folgt, daß a_k das von den Assoziatoren der Elementetripel aus a_{k-1} erzeugte Ideal ist, daß die a_k also die Minimalkette von a_0 bilden. Q. e. d.

Nach Satz 4 ist jeder Unterring des Ringes der algebraischen Mannigfaltigkeiten des S^N ebenfalls assoziativ auflösbar. Unter diesen gibt es Ringe endlichen Ranges über K . Man erhält sie, indem man von endlichen vielen alg. Mfn. ausgeht und beachtet, daß der Durchschnitt zweier Mannigfaltigkeiten aus nur endlich vielen isolierten Komponenten besteht, so daß bei fortwährendem Schneiden (Multiplizieren) nur endlich viele Mannigfaltigkeiten ins Spiel kommen. — Unter den Unterringen gibt es natürlich auch solche, die auflösbar sind von kürzerer Länge als N . So ist z. B. der aus den linearen Räumen des S^N erzeugte Unterring bereits assoziativ nach folgendem etwas allgemeinerem

Satz 18: Ein Unterring $\mathfrak{a}_0$ des Ringes der alg. Mfn. des S^N ist dann und nur dann assoziativ, wenn in ihm alle Multiplizitäten $\mu = 1$ sind und ein in $\mathfrak{a}_0$ auftretender Durchschnitt $A \cap B$ entweder nur eine Komponente hat oder jeweils zwei seiner Komponenten einander nicht schneiden.

Beweis. Zunächst die Notwendigkeit der Bedingungen. 1. Fall: Wäre $\mu(A \cdot B, B) \geq 2$, also B singulärer Bestandteil von A , dann wäre in $\mathfrak{a}_0$ der Assoziator $[A, A, B] = \mu B - \mu^2 B = 0$. 2. Fall: In $A \cdot B = \sum_{i=1}^s \mu(A \cdot B, D_i) D_i$ sei D_1 echte Untermenge von A und B . Falls D_1 singulärer Bestandteil von A oder von B ist, etwa von A , ist wieder $[A, A, D_1] \neq 0$. Wenn aber D_1 nicht-singulärer Bestandteil sowohl von A als auch von B ist, also $\mu(A \cdot D_1, D_1) = \mu(B \cdot D_1, D_1) = 1$ ist, dann ist der Assoziator $[A, B, D_1] = \mu(A \cdot B, D_1) D_1 - D_1 + \sum_{k=2}^s \mu(A \cdot B, D_k) D_k \cdot D_1$ nur dann gleich 0, wenn $\mu(A \cdot B, D_1) = 1$ und entweder $s = 1$ ist, so daß die Summe über $k = 2, \dots, s$ auf der rechten Seite wegfällt, oder wenn alle $D_k \cdot D_1 = 0$ sind. Aus Symmetriegründen folgt $\mu(A \cdot B, D_i) = 1$ und $D_i \cdot D_k = 0$ für alle $i \neq k$. — Die Bedingungen sind auch hinreichend: In $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = D_1 \cup \dots \cup D_u$ sei $A \cdot B = \sum_{i=1}^s X_i$ und $B \cdot C = \sum_{t=1}^w Y_t$. Also tritt jedes D_k in mindestens einem $X_i \cdot C$ und in mindestens einem $A \cdot Y_t$ auf. D_k kann aber nicht in zweien der $X_i \cdot C$ auftreten, weil sonst diese beiden X_i zumindest D_k in ihrem Durchschnitt enthielten, was der Voraussetzung widersprechen würde. Ebensovienig kann D_k in zweien der Y_t auftreten. Hieraus und aus $\mu = 1$ folgt $\sum_{i=1}^s X_i \cdot C = \sum_{k=1}^u D_k = \sum_{t=1}^w A \cdot Y_t$ und damit $[A, B, C] = 0$.

Korollar. Ein Unterring des Ringes der alg. Mfn. des S^2 ist dann und nur dann assoziativ, wenn in ihm alle Multiplizitäten $\mu = 1$ sind.

Beweis. In diesem Fall ist jedes D_i aus dem Durchschnitt zweier irreduzibler Kurven A und B ein Punkt, und zwei Punkte schneiden einander nicht.

Satz 19. Ein Unterring $\mathfrak{a}_0$ des Ringes der alg. Mfn. des S^N ist dann und nur dann potenzassoziativ, wenn er bereits assoziativ ist.

Zu zeigen ist nur, daß die Bedingung notwendig ist. Dazu genügt der Nachweis, daß die Bedingungen des Satzes 18 erfüllt sind. Sie folgen nach leichter, aber etwas umständlicher Rechnung aus dem Vergleich von $((A + \beta B)^2)^2$ mit $((A + \beta B)^2 \cdot (A + \beta B)) \cdot (A + \beta B)$, wobei β die Menge der rationalen Zahlen durchläuft.

Zum Schluß sei noch mit Hilfe des Satzes 15 aus § 3 die Automorphismengruppe des folgenden Unterringes $\mathfrak{a}_0$ des Ringes der alg. Mfn. des S^2 bestimmt. Die Basis von $\mathfrak{a}_0$ bestehe aus der Ebene S^2 , im folgenden S genannt, einer Kurve C mit singulärem Punkt P und aus diesem Punkt P . Seine Elemente sind also $\alpha S + \beta C + \gamma P$. Wegen $\mu(C \cdot P, P) \geq 2$ ist $\mathfrak{a}_0$ nicht assoziativ. $\mathfrak{a}_1$

besteht aus den Elementen γP . τ sei ein Automorphismus von a_0 , unter dem der Körper K der rationalen Zahlen invariant ist. a_1 ist zulässig bei τ und daher wird jedes γP auf sich abgebildet. In a_0/a_1 induziert τ einen Automorphismus τ_0 , bei dem von den beiden einzigen Idempotenten S und $S - C$ in a_0/a_1 entweder jedes auf sich abgebildet wird oder bei dem S und $S - C$ miteinander vertauscht werden. Im ersten Falle induziert τ auch in a_0/a_1 den identischen Automorphismus und muß daher nach Satz 15 auch in a_0 der identische Automorphismus sein. Im zweiten Falle werden von den drei Basiselementen von a_0 bei τ das Einselement S und P auf sich abgebildet, und C auf $S - C + \gamma P$. Aus $\tau\{C \cdot P\} = \tau\{\mu P\} = \mu P$ zusammen mit $\tau(C) \cdot \tau(P) = (S - C + \gamma P)P = (1 - \mu + \gamma)P$ folgt als einzige Möglichkeit für τ , daß $\gamma = 2\mu - 1$ ist. Man verifiziert mühelos, daß die Zuordnung $S \rightarrow S$, $C \rightarrow S - C + (2\mu - 1)P$, $P \rightarrow P$ in der Tat einen Automorphismus τ von a_0 liefert. Die Automorphismengruppe von a_0 besteht also aus diesem τ und dem identischen Automorphismus.

Literatur.

- [1] BEHRENS, E.-A.: Zur Schnittmultiplizität uneigentlicher Komponenten in der algebraischen Geometrie. *Math. Z.* **55**, 199—215 (1952). — [2] BROWN, B.: An extension of the Jacobson radical. *Proc. Amer. Math. Soc.* **2**, 114—117 (1951). — [3] BROWN, B., and N. H. MCCOY: Some theorems on groups with applications to ring theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* **69**, 302—311 (1950). — [4] CHEVALLEY, C.: Intersections of algebraic and algebroid varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.* **57**, 1—85 (1945). — [5] JACOBSON, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. *Amer. J. Math.* **67**, 300—320 (1945). — [6] SAMUEL, P.: La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique I, II. *J. Math. Pures Appl.* (9) **30**, 159—205 und 207—274 (1951). — [7] SMILEY, M. F.: Application of a radical of Brown and McCoy to nonassociative rings. *Amer. J. Math.* **72**, 93—100 (1950). — [8] WAERDEN, B. L. VAN DER: *Moderne Algebra*, Bd. 1. — [9] WEIL, A.: *Foundations of Algebraic Geometry*. New York 1946.

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 15. Oktober 1952.)

Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand.

Von
 K. P. GROTEMEYER.

In den Arbeiten von A. D. ALEKSANDROV und seinem Schüler A. V. POGORELOV über konvexe Flächen wird häufig der Satz benutzt, daß zwei isometrische „Mützen“ (Übersetzung von W. BURAU) mit kongruenten Randkurven zueinander kongruent sind. Unter den „Mützen“ werden dabei positiv gekrümmte Flächenstücke verstanden, die von einer Kurve berandet werden, und die eine eindeutige Projektion besitzen. Dieser Satz soll mit Hilfe der klassischen Flächentheorie in sehr einfacher Weise, allerdings unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, bewiesen werden. Weiter wird die endliche Verbiegung einer Mütze mit ebenem Rand untersucht. Es werden die Bezeichnungen einer früheren Arbeit benutzt¹⁾.

1. Unter einer *Mütze* wollen wir ein beschränktes, dreimal stetig differenzierbares Flächenstück mit positiver GAUSSScher Krümmung K verstehen, welches in der Richtung des Vektors e eine eindeutige Projektion besitzt und von einer geschlossenen, zweimal stetig differenzierbaren Kurve berandet wird.

Ist ξ der Flächennormalenvektor einer Mütze, so ist auf der gesamten Fläche:

$$(1) \quad (e \xi) \geq 0 \quad \text{oder} \quad (e \xi) \leq 0^2).$$

Es sei nun $\mathfrak{M}$ eine Mütze und $\mathfrak{M}^*$ eine zu $\mathfrak{M}$ isometrische Fläche, die dreimal stetig differenzierbar ist und eine zweimal stetig differenzierbare Randkurve besitzt. ($\mathfrak{M}^*$ ist nicht notwendig eine Mütze.) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, daß die Tensoren B_{ik} und B_{ik}^* der zweiten Fundamentalformen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ beide positiv definit sind. Für den Nachweis der Kongruenz oder Symmetrie der Flächen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ muß das Verschwinden von $A_{ik} = B_{ik} - B_{ik}^*$ nachgewiesen werden. Nach Satz 1 der unter ¹⁾ zitierten Arbeit gilt bei positivem K : $\|A_{ik}\| \leq 0$, und aus $\|A_{ik}\| = 0$ folgt $A_{ik} = 0$, d.h. die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen.

Da die Voraussetzung $K > 0$ bei den Mützen erfüllt ist, genügt es hier die Determinante $\|A_{ik}\|$ zu untersuchen. Wir benutzen weiter den in der genannten Arbeit hergeleiteten Integralsatz mit vektoriellen Integranden:

$$[III, 4] \quad \iint_{\mathfrak{g}} \frac{\|A_{ik}\|}{g} \xi \, d\sigma = - \oint A^{ik} n_i x_k \, ds.$$

¹⁾ Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform. Math. Z. **55**, 253—268 (1952). Die dortigen Gleichungen werden hier durch eckige Klammern zitiert.

²⁾ Das sphärische Bild einer Mütze liegt daher ganz auf einer Halbkugel.

Macht man für den Vektor $\underline{A}^{ik} n_k \mathfrak{x}_i$ den Ansatz:

$$\underline{A}^{ik} n_k \mathfrak{x}_i = \alpha \dot{\mathfrak{x}} + \beta \eta,$$

so erhält man durch innere Multiplikation nach [I, 17]:

$$-\underline{A}^{ik} n_k \mathfrak{x}_i = (a - a^*) \dot{\mathfrak{x}} + (b - b^*) \eta.$$

Setzt man dieses in den vorstehenden Integralsatz ein, den wir auf die Flächen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ anwenden, so beziehen sich die mit einem Stern versehenen Größen auf $\mathfrak{M}^*$. Multiplizieren wir nun noch den Integralsatz mit dem Vektor $\mathfrak{e}$, so gilt:

$$(2) \quad \iint_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{M}} \frac{\|\underline{A}_{ik}\|}{g} (\mathfrak{e} \xi) d\sigma = \oint_{R(\mathfrak{M})} \{(a - a^*) (\mathfrak{e} \dot{\mathfrak{x}}) + (b - b^*) (\mathfrak{e} \eta)\} ds.$$

Hier bedeutet $R(\mathfrak{M})$: Rand von $\mathfrak{M}$.

Nach oben Bemerktem ist $\|\underline{A}_{ik}\| \leq 0$, und wegen (1) ändert daher der Integrand des Oberflächenintegrals in (2) auf der Mütze $\mathfrak{M}$ nirgends das Vorzeichen. Aus dem Verschwinden des Randintegrals in (2) wird also $\|\underline{A}_{ik}\| = 0$ folgen und damit die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$. Wir wählen daher solche Voraussetzungen über den Rand von $\mathfrak{M}^*$, daß das betreffende Randintegral verschwinden muß:

Satz 1. Jede zur Mütze $\mathfrak{M}$ isometrische Fläche $\mathfrak{M}^*$ ist kongruent oder symmetrisch zu $\mathfrak{M}$, wenn die Randkurven der beiden Flächen zueinander kongruent oder symmetrisch sind. (Das heißt in entsprechenden Punkten der Randkurven von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ stimmen Krümmung und Windung überein.)

Beweis. Nach dem Gesagten genügt es, das Verschwinden des Randintegrals von (2) nachzuweisen. Für das isometrische Bild $\mathfrak{M}^*$ von $\mathfrak{M}$ gilt längs der Randkurve:

$$(3) \quad k(s) = k^*(s); \quad \varkappa(s) = \varkappa^*(s).$$

Hier sind k und $\varkappa$ bzw. k^* und $\varkappa^*$ Krümmung und Windung der Randkurve von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$. Nun besteht nach W. BLASCHKE³⁾ zwischen $k, \varkappa$ und den „Streifengrößen“ a, b, c der Zusammenhang:

$$(4) \quad b = \sqrt{k^2 - c^2} \quad \text{und} \quad -\varkappa = a + \frac{\dot{c}b - \dot{b}c}{k^2}.$$

Da entsprechende Gleichungen für die Größen mit einem Stern gelten, so ist im vorliegenden Fall wegen der isometrischen Abbildung und wegen (3):

$$c(s) = c^*(s), \quad (\text{geodätische Krümmung})$$

also

$$(5) \quad b^* = \sqrt{k^{*2} - c^2} = \sqrt{k^2 - c^2} = b$$

und

$$(6) \quad -\varkappa^* = a^* + \frac{\dot{c}b - \dot{b}c}{k^2}; \quad \varkappa^* - \varkappa = a - a^* = 0.$$

Es verschwindet somit das Randintegral von (2), und der Satz ist bewiesen.

³⁾ BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, 4. Aufl., S. 71.

Aus den Gln. (3), (4), (5) und (6) liest man ab, daß aus der Kongruenz zweier „Trägerkurven“ von isometrischen Streifen ($c = c^*$) die Kongruenz der Streifen selbst folgt. Man kann daher die Voraussetzungen über die Streifengrößen $a(s)$ und $b(s)$ in den Sätzen 6, 7, 8 der unter ¹⁾ zitierten Arbeit in Voraussetzungen über $k(s)$ und $\kappa(s)$ der Randkurven verwandeln.

Betrachten wir nun Mützen mit ebener Randkurve, so gilt:

Satz 2. *Jede zur Mütze $\mathfrak{M}$ mit ebenem Rand isometrische Fläche $\mathfrak{M}^*$ ist kongruent oder symmetrisch zu $\mathfrak{M}$, wenn nur die Krümmungen in einander entsprechenden Punkten der Randkurven übereinstimmen: $k(s) = k^*(s)$ ⁴⁾.*

Beweis. Die Projektion einer Mütze mit ebenem Rand auf die Randebene ist eindeutig. Es sei also e der Stellungsvektor der Randebene, dann ist auf der gesamten Mütze wieder eine der Ungleichungen von (1) gültig. Längs der Randkurve gilt $(e \dot{x}) = 0$. Der Integralsatz (2) nimmt damit die Form an:

$$(7) \quad \iint_{\mathfrak{M}} \frac{\|A_{ik}\|}{g} (e \xi) d\sigma = \oint_{R(\mathfrak{M})} (b - b^*) (e \eta) ds.$$

Weil am Rand $k = k^*$ sein soll, so ist nach (4) wieder $b - b^* = 0$, und das Randintegral verschwindet. Damit ist der Satz 2 ebenfalls bewiesen.

2. Sprechen wir nun noch die Sätze 1 und 2 als Sätze über endliche Verbiegungen von Mützen aus. Der Satz 1 besagt jetzt:

Satz 1'. *Eine Mütze ist gegenüber allen endlichen Verbiegungen starr, die die Randkurve festlassen.*

Satz 2'. *Eine Mütze mit ebenem Rand ist gegenüber allen endlichen Verbiegungen starr, die die Krümmung der Randkurve nicht ändern.*

3. Diesen beiden Sätzen über die endlichen Verbiegungen von Mützen entsprechen zwei Sätze über die infinitesimale Verbiegung von Mützen, die so lauten:

Eine Mütze ist gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr, die die Krümmung und Windung der Randkurve stationär lassen;

⁴⁾ Die Voraussetzung über die Krümmungen der Randkurven von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ können wir noch etwas abschwächen, indem wir längs der Randkurve nur $k \geq k^*$ verlangen. Man sieht leicht ein, daß unter den angegebenen Voraussetzungen in dieser Ungleichung nur das Gleichheitszeichen gelten kann: Da die Randkurve von $\mathfrak{M}$ eben ist, so gilt nach W. FENCHEL [Math. Ann. **101**, S. 238 ff. (1929)]

$$\oint k ds = 2\pi.$$

Da die entsprechende Kurve von $\mathfrak{M}^*$ nicht notwendig eben zu sein braucht, so ist

$$\oint k^* ds \geq 2\pi.$$

Es ist daher

$$\oint (k - k^*) ds \leq 0.$$

Wegen $k - k^* \geq 0$ folgt daraus aber die Gültigkeit des Gleichheitszeichens.

⁵⁾ REMBS, E.: Unverbiegbare offene Flächen. Sitzgsber. Berl. Akad. 1930, S. 127 ff.

und:

Eine Mütze mit ebenem Rand ist gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr, die die Krümmung der Randkurve stationär lassen.

Der Beweis dieser Sätze läßt sich sehr einfach mit Hilfe der Integralformel von E. REMBS⁵⁾ führen, wenn man die Ableitung des Drehnisses η längs der Randkurve als lineares Kompositum von $\dot{\xi}$ und η darstellt. Bezeichnet man etwa mit δa und δb die „Variation“ von geodätischer Torsion und Normalkrümmung längs der Randkurve bei der infinitesimalen Verbiegung der Mütze, so ist nämlich:

$$(8) \quad \dot{\eta} = \delta a \dot{\xi} + \delta b \eta^6).$$

Trägt man diese Darstellung in den REMBSchen Integralsatz ein, und beachtet man, daß wegen $\delta c = 0$ aus $\delta k = 0$ und $\delta \kappa = 0$ auch folgt $\delta a = 0$ und $\delta b = 0$, so ergibt sich sofort der erste der beiden oben genannten Sätze. Für den Beweis des zweiten Satzes müssen wir nur noch beachten, daß aus $\delta k = 0$ schon $\delta b = 0$ folgt.

4. In allen Sätzen über die Kongruenz oder Symmetrie von Flächen in der vorliegenden und in der unter 1) genannten Arbeit wurde vorausgesetzt, daß die betrachteten Flächen positive GAUSSSCHE Krümmung haben. Diese Voraussetzung wurde insofern gebraucht, als man daraus die, bei den Beweisen unbedingt erforderlichen Eigenschaften des Tensors A_{ik} gewinnt, die so lauten:

$$\|A_{ik}\| \leq 0, \quad \text{und aus} \quad \|A_{ik}\| = 0 \quad \text{folgt} \quad A_{ik} = 0.$$

Wir behaupten jetzt, daß A_{ik} auch im Falle $H = H^*$ diese Eigenschaften aufweist. (H und H^* sind die mittleren Krümmungen der isometrischen Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$.)

Es ist

$$A_{ik} = B_{ik} - B_{ik}^*; \quad A_k^k = 2H - 2H^* = 0$$

und

$$2 \frac{\|A_{ik}\|}{g} = (A_i^i)^2 - A_{ik} A^{ik}$$

daher

$$(9) \quad 2 \frac{\|A_{ik}\|}{g} = -A_{ik} A^{ik}.$$

Weil der Tensor A_{ik} symmetrisch ist, so hat die charakteristische Gleichung

$$\|A_{ik} - \lambda g_{ik}\| = 0$$

⁶⁾ Anmerkung bei der Korrektur: Diese Beziehung wird in einer demnächst im Archiv d. Math. erscheinenden Arbeit: „Zur infinitesimalen und endlichen Verbiegung von Halbeiflächen“ hergeleitet und dazu benutzt, Größen, die in „Starrheitsintegralsätzen“ auftreten, geometrisch zu interpretieren.

Die zum Satz 1 und 2 der vorliegenden und zu den Sätzen 6, 7, 8 der unter 1) zitierten Arbeit gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen lassen sich noch etwas abschwächen. Dazu vergleiche man A. WINTER: Amer. J. of Math. 74, 198—214 (1952).

reelle Wurzeln. Aus der Ungleichung für die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung folgt daher $\|A_{ik}\| \leq 0$. Ist jetzt etwa $\|A_{ik}\| = 0$, so ist die Zerlegung gültig:

$$A_{ik} = a_i a_k,$$

und aus (9) folgt $(a_i a^i)^2 = 0$ d.h. $a_i = 0$, oder $A_{ik} = 0$. Damit haben wir die genannten Eigenschaften nachgewiesen. Wir können daher in den Sätzen 5, 6, 7 und 8 der unter ¹⁾ zitierten Arbeit und in den Sätzen 1 und 2 der vorliegenden Arbeit die Voraussetzung $K > 0$ durch die Voraussetzung $H - H^* = 0$ ersetzen. Unter der Voraussetzung $H - H^* = 0$ erhält man so einige Kongruenzsätze für beliebig gekrümmte Flächenstücke.

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 17. Oktober 1952.)

FK-Räume und Matrixtransformationen.

Von

KARL ZELLER.

Ein *FK*-Raum ist ein lokalkonvexer *F*-Raum, der aus Folgen komplexer Zahlen $x = \{x_k\}_{k=0,1,\dots}$ besteht und in dem die Abbildungen $x \rightarrow x_k$ ($k=0,1,\dots$) linear und stetig sind.

Eine Matrixtransformation in unserem Sinn hat die Gestalt

$$\eta = A x \equiv y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \quad (n=0,1,\dots).$$

Sie gilt als erklärt, wenn alle Summen y_n konvergieren.

In einer früheren Arbeit ([1951] — wir verwenden dieselben Bezeichnungen) hat Verf. die Zusammenhänge zwischen Matrixtransformationen und *FK*-Räumen untersucht. Verf. verdankt Herrn W. MEYER-KÖNIG und Herrn A. WILANSKY den Hinweis auf einen Fehler beim Beweise des dortigen Satzes 4.10c (hier Satz 2). Wir schließen diese Beweislücke, erhalten ein neues Ergebnis (Satz 1) und kommen auf einige kleine Versehen in dem bekannten Buch von BANACH [1932] zu sprechen, die von Herrn G. LORENTZ und Herrn A. WILANSKY bemerkt worden sind.

Satz 1. $[\mathfrak{G}; p_j]$ und $[\mathfrak{F}; q_j]$ seien *FK*-Räume, A eine Matrix. Jedem $\eta \in \mathfrak{F}$ entspreche vermittle $\eta = A x$ genau ein $x \in \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{F}A$ (die Menge der von A in $\mathfrak{F}$ abgebildeten $x \in \mathfrak{G}$) ein *FK*-Raum mit den Quasinormen $q_j(Ax)$. Insbesondere sind die Abbildungen $\eta \rightarrow x_k$ im Raum $[\mathfrak{F}]$ linear und stetig.

Beweis. Nach Verf. [1951, 4.10 und 4.7] ist $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{F}A = \mathfrak{G}$ mit gewissen Quasinormen r_j ein *FK*-Raum. Die Abbildung $x \rightarrow Ax$ von $[\mathfrak{G}]$ auf $[\mathfrak{F}]$ ist linear und stetig, also hat auch die Umkehrabbildung $Ax \rightarrow x$ von $[\mathfrak{F}]$ auf $[\mathfrak{G}]$ diese beiden Eigenschaften (BANACH [1932, S. 41, Th. 5]). Daher sind $[\mathfrak{G}; r_j]$ und $[\mathfrak{F}; q_j]$ isomorphe *F*-Räume, was die Behauptung ergibt. Vgl. BANACH [1932, S. 47, Th. 10].

Bemerkung. Mit Hilfe einer HAMEL-Basis können wir im *FK*-Raum $[\mathfrak{F}]$ ein lineares unstetiges Funktional $u(\eta)$ erklären. Der Raum $\mathfrak{F}'$ der Folgen $\{y'_0 = u(\eta), y'_1 = y_0, \dots\}$ ($\eta \in \mathfrak{F}$) läßt sich als ein zu $\mathfrak{F}$ isomorpher *F*-Raum auffassen, ist jedoch kein *FK*-Raum, da die Abbildung $\eta' \rightarrow y'_0$ wohl linear, aber nicht stetig ist. Mit $\mathfrak{F}'$ an Stelle des *FK*-Raumes $\mathfrak{F}$ ist insbesondere die Behauptung über $\eta \rightarrow x_k$ in Satz 1 falsch: Man setze $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}_K$ (Raum aller Zahlenfolgen), $A =$ Einheitsmatrix, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$. Räume wie $\mathfrak{F}'$ hat BANACH [1932, S. 47, Th. 10] nicht ausdrücklich ausgeschlossen. Ferner ist dort die Behauptung über die Beschränktheit der C_k (S. 50 oben) wohl ein Versehen. Wäre sie

allgemein richtig, so müßten sogar fast alle c_k verschwinden. Verlangt man von A nur Umkehrbarkeit bezüglich eines gewissen Urraumes, so wird ein „Gegenbeispiel“ durch die Matrix mit den Elementen $a_{n0} = 1$, $a_{n,n+1} = \frac{1}{n+1}$, $a_{nk} = 0$ sonst, geliefert.

Satz 2. Die Matrix A sei zeilenfinit, aus $A \mathfrak{x} = 0$ folge $\mathfrak{x} = 0$ (Nullelement). $[\mathfrak{F}; q_j]$ sei ein FK-Raum. Dann ist $\mathfrak{F}A$ (die Menge der von A in $\mathfrak{F}$ abgebildeten $\mathfrak{x}$) ein FK-Raum mit den Quasinormen $q_j(A \mathfrak{x})$.

Beweis. Nach TOEPLITZ [1909] ist ein $\mathfrak{y}$ genau dann in der Form $\mathfrak{y} = A \mathfrak{x}$ (A zeilenfinit) darstellbar, wenn jede Beziehung der Form $\sum_{n=0}^m \alpha_n a_{nk} = 0$ ($k=0, 1, \dots$) die Gleichung $\sum_{n=0}^m \alpha_n y_n = 0$ nach sich zieht. Das besagt, daß die $\mathfrak{y}$ einen linearen abgeschlossenen Unterraum $\mathfrak{T}$ im FK-Raum $\mathfrak{E}_K$ aller Zahlenfolgen bilden: $\mathfrak{T}$ ist dadurch charakterisiert, daß die eben genannten linearen stetigen Funktionale in $\mathfrak{T}$ verschwinden. $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{F}$ ist ein FK-Raum mit denselben Quasinormen wie $\mathfrak{F}$. Satz 1 vollendet den Beweis.

Bemerkung. Satz 2 und das TOEPLITZsche Ergebnis gelten nicht für beliebige Matrizen: Betrachte die Matrix A mit $a_{nk} = 1$ für $n=0$ und $n=k$, $a_{nk} = 0$ sonst, und setze $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_K$. Bei BANACH [1932, S. 51, Th. 12] ist demnach der TOEPLITZsche Satz ungenau zitiert. Beim Beweise des darauffolgenden Th. 13 (= Satz 3) hat sich ein Druckfehler eingeschlichen, weswegen wir den Beweis wiederholen.

Satz 3. Ist die Matrix A so beschaffen, daß es zu jedem $\mathfrak{y}$ genau ein $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y} = A \mathfrak{x}$ gibt, so ist A zeilenfinit.

Beweis. Nach Satz 1 (mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{F} = \mathfrak{E}_K$) sind die Abbildungen $\mathfrak{y} \rightarrow x_k$ lineare stetige Funktionale in $[\mathfrak{E}_K]$, also von der Form $\sum_{n=0}^m b_{kn} y_n = x_k$. Die Umkehrabbildung zu A wird also durch eine zeilenfinite Matrix B dargestellt. Der Bildraum von B enthält alle abbrechenden Folgen, daher tritt nach TOEPLITZ jedes $\mathfrak{x}$ als Bildelement von B auf. Somit ist $\mathfrak{y} = A \mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x}$ erklärt und A zeilenfinit.

Wir skizzieren noch einen zweiten Beweisweg. $\mathfrak{E}_K A$ ist nach Satz 1 ein FK-Raum mit den Quasinormen $|y_0|, |y_1|, \dots$ ($\mathfrak{y} = A \mathfrak{x}$).

$$q(\mathfrak{x}) = \overline{\lim}_{l=0,1,\dots} \left| \sum_{k=0}^l a_{0k} x_k \right|$$

ist eine stetige Quasinorm in $\mathfrak{E}_K A$, also gilt eine Ungleichung

$$q(\mathfrak{x}) \leq \varrho \cdot (|y_0| + \dots + |y_m|).$$

Hat a_{0k} mehr als $m+1$ Nichtnullen, so erhält man auf Grund elementarer Sätze über $m+1$ Gleichungen mit $m+2$ Unbekannten ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}_K A$ mit

$y_0 = \dots = y_m = 0$ und $q(x) \neq 0$, also einen Widerspruch. Ebenso werden die andern Zeilen von A behandelt.

Eine Bemerkung zum Beweis von Th. 7 bei BANACH, S. 41, steht bei Verf. [1953, § 6].

Literatur.

BANACH, S.: *Théorie des opérations linéaires*. 252 S. Warschau 1932. — TOEPLITZ, O.: Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **28**, 88—96 (1909). — ZELLER, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. *Math. Z.* **53**, 463—487 (1951). — *FK-Räume in der Funktionentheorie*. Erscheint in *Math. Z.* **58** (1953).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 8. Dezember 1952.)

Lösung von zwei verwandten Integralgleichungssystemen.

Von
KARL NICKEL.

I. Einleitung.

Das Integralgleichungssystem (IGIS)

$$(1) \quad \frac{k}{\pi} \sum_{v=1}^n \int_{a_v}^{b_v} f_v(y_v) \operatorname{ctg} k(x_\mu - y_v) dy_v = g_\mu(x_\mu)^1$$

ist bisher nur für $n=1$ gelöst worden. Die Lösung haben J. DÖRR²⁾ und der Verfasser³⁾ unabhängig voneinander angegeben.

Das verwandte IGIS

$$(2) \quad \frac{k}{\pi} \sum_{v=1}^n \int_{a_v}^{b_v} \frac{f_v(y_v)}{\sin k(x_\mu - y_v)} dy_v = g_\mu(x_\mu)$$

scheint bisher auch in Sonderfällen noch nicht gelöst zu sein. Seine Lösung für $n=1$ läßt sich in einfacher Weise aus der von (1) gewinnen.

In der vorliegenden Arbeit werden die beiden IGIS (1) und (2) auf die Fälle $n=1$ zurückgeführt und dadurch gelöst. Das Beweisverfahren arbeitet mit vollständiger Induktion und ist schon bei der Lösung des IGIS

$$(3) \quad \frac{1}{\pi} \sum_{v=1}^n \int_{a_v}^{b_v} \frac{f_v(y_v)}{x_\mu - y_v} dy_v = g_\mu(x_\mu)$$

beschrieben worden⁴⁾. Als einzige Neuheit gegenüber der Lösung von (3) ergibt sich im vorliegenden Falle folgendes: Bei der Reduktion des IGIS (1) von n auf $n-1$ Gleichungen kommt man auf ein IGIS der Gestalt (2), und umgekehrt. Es ist also zweckmäßig, (1) und (2) zusammen zu lösen.

¹⁾ Für $v=\mu$ ist das dann für $y_v=x_\mu$ singulär werdende Integral als CAUCHYSCHER Hauptwert aufzufassen, woran der Akzent beim Integralzeichen erinnern soll. Wegen der Permanenz des CAUCHYSCHEN Hauptwertes darf dieser Akzent hier an sämtlichen Integralzeichen angebracht werden.

²⁾ DÖRR, J.: Strenge Lösung der Integralgleichung für die Strömung durch ein senkrechtes Flügelgitter. Ing.-Arch. **19**, 66—68 (1951).

³⁾ NICKEL, K.: Integralgleichungen erster Art in der Strömungslehre und ihre Auflösung. Z. angew. Math. Mech. **31** 285—286 (1951). Siehe auch NICKEL, K.: Zusatz zu J. DÖRR: Strenge Lösung der Integralgleichung für ein Flügelgitter. Ing.-Arch. **20**, 6—7 (1952).

⁴⁾ NICKEL, K.: Lösung eines Integralgleichungssystems aus der Tragflügeltheorie. Math. Z. **54**, 81—96 (1951).

Zur Vereinfachung werden nur reelle oder rein imaginäre Werte des Parameters k in den beiden Systemen (1) und (2) zugelassen. Ersetzt man im zweiten Fall k durch $i k$ (k dann reell), so gehen die trigonometrischen Funktionen in den Kernen der beiden IGIS und ihrer Lösungen in die entsprechenden Hyperbelfunktionen über und man hat wieder rein reelle Gleichungen. Daß die angegebenen Lösungen tatsächlich für beliebige komplexe Werte des Parameters k und übrigens auch für nichtgeradlinige Integrationswege in der komplexen Zahlenebene gültig bleiben, soll in einer weiteren Arbeit nachgewiesen werden^{4a)}.

Geht man in (1) oder (2) mit k gegen Null, so ergibt sich das IGIS (3), das sich somit als Sonderfall von (1) und (2) erweist.

Der Sonderfall $k = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 2\pi$ führt bei (1) auf die zuerst von HILBERT⁵⁾ gelöste Integralgleichung

$$(1a) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} dy = g(x).$$

Es besteht nun die bemerkenswerte Tatsache, daß die Lösung der beiden allgemeinen IGIS (1) und (2) auf die Lösung dieses einen Sonderfalls (1a) zurückgeführt werden kann. Durch elementare Umformungen läßt sich nämlich der Fall $n=1$ des Systems (3)

$$(3a) \quad \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(y)}{x-y} dy = g(x)$$

in (1a) überführen [vgl. etwa⁴⁾, S. 84]. Aus dieser Integralgleichung findet man durch weitere Umformungen [vgl. J. DÖRR²⁾] die Gl. (1) für $n=1$

$$(1b) \quad \frac{k}{\pi} \int_a^b f(y) \operatorname{ctg} k(x-y) dy = g(x)$$

und gerade auf diese werden im folgenden die Systeme (1) und (2) reduziert. Damit lassen sich sämtliche Aussagen über die Integralgleichung (1a) und ihre Lösung, insbesondere über die notwendigen Voraussetzungen⁶⁾, sogleich auf (1) und (2) übertragen.

2. Ergebnisse.

Alle vorkommenden Integrale sollen im LEBESGUESchen Sinne aufgefaßt werden. Funktionen, die außer in Punkten einer Menge vom LEBESGUESchen Maße Null übereinstimmen, sollen nicht unterschieden werden.

^{4a)} Zusatz bei der Korrektur: Wurde für (1) im Falle $n=1$ inzwischen von J. DÖRR gezeigt. DÖRR, J.: Über zwei mit der Tragflügeltheorie in Zusammenhang stehende Integralgleichungen. Ing. Arch. **20**, 88—90 (1952).

⁵⁾ HILBERT, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 75. Leipzig: G. B. Teubner 1912.

⁶⁾ Man vgl. etwa RIESZ, M.: Sur les fonctions conjuguées. Math. Z. **27**, 218—244 (1928).

Die n abgeschlossenen Intervalle $\langle a_v, b_v \rangle$ ($v=1, \dots, n$) seien punktfremd und von links nach rechts numeriert, d. h. es sei $a_v < b_\mu$ für $v \leq \mu$, aber $a_v > b_\mu$ für $v > \mu$. Die Veränderlichen x_v und y_v sollen im folgenden stets im Intervall $\langle a_v, b_v \rangle$ liegen. Die reelle Zahl $p > 1$ sei beliebig gewählt. Die n reellen Funktionen $g_v(x_v)$ ($a_v \leq x_v \leq b_v$; $v=1, \dots, n$) seien meßbar und die Integrale

$$\int_{a_v}^{b_v} |g_v(x_v)|^p \sqrt{(b_v - x_v)(x_v - a_v)}^{p-1} dx_v$$

mögen existieren. Weiter sei der Parameter k reell oder rein imaginär, im reellen Falle mit der Einschränkung

$$(4) \quad |k| \leq \frac{\pi}{b_n - a_1}.$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt der

Satz: a) Die allgemeinste Lösung des IGLS

$$(1) \quad \frac{k}{\pi} \sum_{v=1}^n \int_{a_v}^{b_v} f_v(y_v) \operatorname{ctg} k(x_\mu - y_v) dy_v = g_\mu(x_\mu) \quad (\mu=1, \dots, n)$$

lautet

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} f_v(y_v) &= \frac{k}{\pi} \frac{(-1)^v}{\sqrt{-\prod_{\kappa=1}^n \sin k(b_\kappa - y_v) \sin k(a_\kappa - y_v)}} \times \\ &\times \left[P_n(y_v) + \sum_{\mu=1}^n (-1)^\mu \int_{a_\mu}^{b_\mu} g_\mu(x_\mu) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sin k(x_\mu - y_v)} & n=2m+1 \\ \operatorname{ctg} k(x_\mu - y_v) & n=2m \end{array} \right\} \times \right. \\ &\times \left. \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^n \sin k(b_\lambda - x_\mu) \sin k(a_\lambda - x_\mu)} dx_\mu \right]^{(7)} \quad (v=1, \dots, n) \end{aligned} \right.$$

mit

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} P_n(y) &= A_n \cos k \left(y - \sum_{\varrho=1}^n \frac{a_\varrho + b_\varrho}{2} \right) \sin k y + \\ &+ \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{\kappa=1}^{\frac{n-1}{2}} (A_{2\kappa-1} \sin k y + A_{2\kappa} \cos k y) & n=2m+1 \\ A_{n-1} + \cos k y \sum_{\kappa=1}^{\frac{n-2}{2}} (A_{2\kappa-1} \sin k y + A_{2\kappa} \cos k y) & n=2m \end{array} \right\}^{(8)} \end{aligned} \right.$$

und beliebigen (reellen) Koeffizienten A_v ($v=1, \dots, n$).

⁷⁾ $n=2m+1$ soll bedeuten: für alle ungeraden Werte von n . $n=2m$ entsprechend: für alle geraden.

⁸⁾ Leere Summen und nichtdefinierte Größen (z. B. A_0 für $n=1$) sollen weggelassen werden.

b) Die allgemeinste Lösung des IGLS

$$(2) \quad \frac{k}{\pi} \sum_{v=1}^n \int_{a_v}^{b_v} \frac{f_v(y_v)}{\sin k(x_\mu - y_v)} dy_v = g_\mu(x_\mu) \quad (\mu = 1, \dots, n)$$

lautet

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} f_v(y_v) &= \frac{k}{\pi} \frac{(-1)^v}{\sqrt{-\prod_{\kappa=1}^n \sin k(b_\kappa - y_v) \sin k(a_\kappa - y_v)}} \times \\ &\times \left[Q_n(y_v) + \sum_{\mu=1}^n (-1)^\mu \int_{a_\mu}^{b_\mu} g_\mu(x_\mu) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{ctg} k(x_\mu - y_v) & \quad n = 2m + 1 \\ \frac{1}{\sin k(x_\mu - y_v)} & \quad n = 2m \end{aligned} \right\} \right. \\ &\times \left. \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^n \sin k(b_\lambda - x_\mu) \sin k(a_\lambda - x_\mu)} dx_\mu \right] \quad (v = 1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \times$$

mit

$$(8) \quad Q_n(y) = \left\{ \begin{aligned} B_n + \cos k y \sum_{\kappa=1}^{\frac{n-1}{2}} (B_{2\kappa-1} \sin k y + B_{2\kappa} \cos k y) & \quad n = 2m + 1 \\ \sum_{\kappa=1}^{\frac{n}{2}} (B_{2\kappa-1} \sin k y + B_{2\kappa} \cos k y) & \quad n = 2m \end{aligned} \right\}$$

und beliebigen (reellen) Koeffizienten B_v ($v = 1, \dots, n$).

Unter den getroffenen Voraussetzungen sind die Funktionen $f_v(y_v)$ aus (5) und (7) meßbar und die Integrale

$$\int_{a_v}^{b_v} |f_v(y_v)|^p \sqrt{(b_v - y_v)(y_v - a_v)^{p-1}} dy_v$$

existieren.

Sind sogar die Funktionen

$$|g_\mu(x_\mu)|^p \left\{ \begin{aligned} & \frac{b_\mu - x_\mu}{x_\mu - a_\mu}^{p-1} \\ & \frac{1}{x_\mu - a_\mu} \end{aligned} \right\}^{\pm 1}$$

integrierbar, so gilt der folgende

Zusatz:

$$a) (5a) \quad \left\{ \begin{aligned} f_v(y_v) &= \frac{k}{\pi} \left\{ \sqrt{-\prod_{\kappa=1}^n \frac{\sin k(a_\kappa - y_v)}{\sin k(b_\kappa - y_v)}} \right\}^{\pm 1} \sum_{\mu=1}^n \int_{a_\mu}^{b_\mu} g_\mu(x_\mu) \times \\ &\times \left[\operatorname{ctg} k(x_\mu - y_v) \mp \operatorname{tg} k \sum_{\varrho=1}^n \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2} \right] \left\{ \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin k(b_\lambda - x_\mu)}{\sin k(a_\lambda - x_\mu)}} \right\}^{\pm 1} dx_\mu \end{aligned} \right\}$$

($v = 1, \dots, n$)

ist eine spezielle Lösung des IGLS (1).

$$b) \quad (7a) \quad \left\{ \begin{aligned} f_v(y_v) &= \frac{k}{\pi} \left\{ \sqrt{-\prod_{\kappa=1}^n \frac{\sin k(a_\kappa - y_v)}{\sin k(b_\kappa - y_v)}} \right\}^{\pm 1} \sum_{\mu=1}^n \int_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{g_\mu(x_\mu)}{\sin k(x_\mu - y_v)} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin k(b_\lambda - x_\mu)}{\sin k(a_\lambda - x_\mu)}} \right\}^{\pm 1} dx_\mu \quad (v = 1, \dots, n) \end{aligned} \right.$$

ist eine spezielle Lösung des IGLS (2).

Für $f_v(y_v)$ aus (5a) und (7a) gilt sogar:

$$f_v(y_v) \neq \left\{ \begin{aligned} & \left| \frac{b_v - y_v}{a_v} \right|^{p-1} \\ & \left| \frac{y_v - a_v}{b_v} \right|^{p-1} \end{aligned} \right\}^{\pm 1}$$

ist integrierbar.

Bemerkung. Die Funktionen P_n und Q_n aus Gl. (6) bzw. (8) lassen sich auch in folgender Weise darstellen:

$$(6a) \quad P_n(y) = \sum_{\kappa=1}^n C_\kappa \cos k \left(y - a_\kappa - \sum_{\varrho=1}^n \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2} \right) \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \kappa}}^n \sin k(a_\lambda - y)^9$$

$$(8a) \quad Q_n(y) = \sum_{\kappa=1}^n D_\kappa \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \kappa}}^n \sin k(a_\lambda - y)^9$$

mit beliebigen (reellen) Konstanten C_κ und D_κ ($\kappa = 1, \dots, n$). Dabei können in (6a) und (8a) die unteren Integrationsgrenzen a_λ auch durch die oberen b_λ ersetzt werden.

Die Darstellungen (6a) und (8a) sind für manche Zwecke besonders bequem, so z.B. für den oben erwähnten Grenzübergang $k \rightarrow 0$.

3. $n = 1$.

a) Das IGLS (1) reduziert sich für $n=1$ auf

$$(1b) \quad \frac{k}{\pi} \int_a^b f(y) \operatorname{ctg} k(x-y) dy = g(x).$$

Man sucht (1b) auf (3a) zurückzuführen und so zu lösen [vgl. dazu J. DÖRR²]. Dazu spaltet man $f(y)$ bzw. $g(x)$ auf:

$$f(y) = f_+(y) + f_-(y), \quad g(x) = g_+(x) + g_-(x),$$

wo f_+ und g_+ zum Mittelpunkt $\frac{a+b}{2}$ der Strecke $\langle a, b \rangle$ symmetrisch, f_- und g_- dagegen antisymmetrisch sind. Mit der Setzung $X = x - \frac{a+b}{2}$, $Y = y - \frac{a+b}{2}$ und der Identität

$$\operatorname{ctg} k(x-y) = \frac{\sin kX \cos kX + \sin kY \cos kY}{\sin^2 kX - \sin^2 kY}$$

⁹) Leere Produkte sollen 1 bedeuten.

ergibt sich dann aus (1b)

$$g_+(x) = \frac{k}{\pi} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f_-(y) \frac{\sin kY \cos kY}{\sin^2 kX - \sin^2 kY} dY = \frac{k}{\pi} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f_-(y) \frac{\cos kY}{\sin kX - \sin kY} dY,$$

$$g_-(x) = \frac{k}{\pi} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f_+(y) \frac{\sin kX \cos kX}{\sin^2 kX - \sin^2 kY} dY = \frac{k}{\pi} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f_+(y) \frac{\cos kX}{\sin kX - \sin kY} dY.$$

Man setzt nun $u = \sin kX$, $v = \sin kY$, $\alpha = \sin k \frac{b-a}{2}$ und wendet die Schreibweise an $g(x) = g(u)$, $f(y) = f(v)$. Dies liefert aus den obigen Gleichungen:

$$g_+(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} f_-(v) \frac{dv}{u-v}, \quad g_-(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f_+(v)}{u-v} \sqrt{\frac{1-u^2}{1-v^2}} dv.$$

Mit der bekannten [vgl. 4)] Auflösungsformel

$$f(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(b-y)(y-a)}} \left[\int_a^b f(x) dx + \int_a^b \frac{g(x)}{x-y} \sqrt{(b-x)(x-a)} dx \right]$$

von (3a) lassen sich nun diese beiden Integralgleichungen für f_+ und f_- auflösen. Macht man dann die obigen Transformationsschritte wieder rückgängig, so ergibt sich schließlich die gesuchte allgemeinste Lösung von (1b):

$$(4b) \quad \begin{cases} f(y) = \frac{k}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin k(b-y) \sin k(y-a)}} \left[\cos k\left(y - \frac{a+b}{2}\right) \int_a^b f(x) dx + \right. \\ \left. + \int_a^b \frac{g(x)}{\sin k(x-y)} \sqrt{\sin k(b-x) \sin k(x-a)} dx \right]. \end{cases}$$

Dabei ist die Umkehrbarkeit der durchgeführten Transformationen wegen der Monotonie der verwendeten Sinusfunktion in dem betrachteten Intervall durch die Bedingung (4) auch für reelle k sichergestellt.

b) Das IGIS (2) reduziert sich für $n=1$ auf

$$(2a) \quad \frac{k}{\pi} \int_a^b \frac{f(y)}{\sin k(x-y)} dy = g(x).$$

Man findet die zugehörige Lösung aus (4b) durch einige Umformungen. Da diese typisch für die Behandlung solcher Aufgaben sind, sollen sie hier etwas ausführlicher gebracht werden.

Setzt man die trigonometrische Identität

$$(9) \quad \frac{1}{\sin k(x-y)} = \operatorname{ctg} k(x-y) \frac{\sin k(y-a)}{\sin k(x-a)} + \frac{\cos k(y-a)}{\sin k(x-a)}$$

in (2a) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{k}{\pi} \int_a^b f(y) \sin k(y-a) \operatorname{ctg} k(x-y) dy \\ = g(x) \sin k(x-a) - \frac{k}{\pi} \int_a^b f(y) \cos k(y-a) dy \end{aligned}$$

oder

$$\frac{k}{\pi} \int_a^b F(y) \operatorname{ctg} k(x-y) dy = G(x)$$

mit

$$F(y) = f(y) \sin k(y-a), \quad G(x) = g(x) \sin k(x-a) - \frac{k}{\pi} \int_a^b f(y) \cos k(y-a) dy.$$

Diese Integralgleichung für $F(y)$ hat nun nach (1b) und (4b) als allgemeinste Lösung

$$\begin{aligned} F(y) = \frac{k}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin k(b-y) \sin k(y-a)}} \times \\ \times \left[\cos k\left(y - \frac{a+b}{2}\right) \int_a^b F(x) dx + \int_a^b \frac{G(x)}{\sin k(x-y)} \sqrt{\sin k(b-x) \sin k(x-a)} dx \right] \end{aligned}$$

oder mit (9) und (19)

$$\begin{aligned} f(y) = \frac{k}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin k(b-y) \sin k(y-a)}} \left[\frac{\cos k\left(y - \frac{a+b}{2}\right)}{\sin k(y-a)} \int_a^b f(x) \sin k(x-a) dx + \right. \\ \left. + \frac{\sin k\left(y - \frac{a+b}{2}\right)}{\sin k(y-a)} \int_a^b f(x) \cos k(x-a) dx + \operatorname{ctg} k(y-a) \times \right. \\ \left. \times \int_a^b g(x) \sqrt{\sin k(b-x) \sin k(x-a)} dx + \right. \\ \left. + \int_a^b g(x) \operatorname{ctg} k(x-y) \sqrt{\sin k(b-x) \sin k(x-a)} dx \right]. \end{aligned}$$

Aus (2a) ergibt sich nun durch Integration mit (19)

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) \sqrt{\sin k(b-x) \sin k(x-a)} dx = -\cos k \frac{b-a}{2} \int_a^b f(y) \sin k(y-a) dy + \\ + \sin k \frac{b-a}{2} \int_a^b f(y) \cos k(y-a) dy. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösung von (2a)

$$(6b) \quad \left\{ \begin{aligned} f(y) &= \frac{k}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin k(b-y) \sin k(y-a)}} \left[\int_a^b f(x) \cos k \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_a^b g(x) \operatorname{ctg} k(x-y) \sqrt{\sin k(b-x) \sin k(x-a)} dx \right]. \end{aligned} \right.$$

4. Lösungsverfahren für $n > 1$.

Der Beweis der in 2. ausgesprochenen Behauptungen geht nun folgendermaßen vor sich: Mit den in 3. erhaltenen beiden Lösungsformeln (4b) und (6b) für $n=1$ gewinnt man aus der m -ten Zeile von (1) bzw. (2) die Funktion $f_m(y_m)$ in Abhängigkeit von $g_m(x_m)$ und den übrigen $n-1$ gesuchten Funktionen $f_v(y_v)$ ($v=1, \dots, n; v \neq m$), und setzt sie in die restlichen $n-1$ Zeilen ein. Dabei kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $m=n$ gewählt werden. Das damit aus (1) bzw. (2) entstehende lineare IGIS aus $n-1$ Gleichungen ist nun von der Art (2) bzw. (1). Man hat also die Anzahl der Gleichungen um eine reduziert, ohne dafür ein schwierigeres Gleichungssystem einzutauschen und kann so die behaupteten Formeln durch vollständige Induktion beweisen.

Zu den genannten Schritten benötigt man die Kenntnis von einigen Hilfsformeln, die sich entweder elementar berechnen oder ebenfalls mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung beweisen lassen. Die speziellen Lösungsformen (5a) und (7a) lassen sich auf die Lösungen (5) und (7) zurückführen, es ist also nicht notwendig, den beschriebenen Beweisgang dafür noch einmal zu wiederholen.

Der gesamte Beweis wurde mit allen seinen Schritten für das IGIS (3) in ⁴⁾ ausführlich gebracht und verläuft für die IGIS (1) und (2) Punkt für Punkt entsprechend. Daher soll hier von einer nochmaligen Durchführung des Beweises abgesehen und es sollen nur sämtliche notwendigen Hilfsformeln angegeben werden. Mit diesen läßt sich der oben skizzierte Beweisgang ohne jede Schwierigkeit verfolgen. Dabei ergibt sich eine angenehme Kontrollmöglichkeit aus der Tatsache, daß (1) und (2) für $k \rightarrow 0$ in (3) übergehen. Man kann daher an jeder Stelle des Rechnungsganges das Ergebnis durch den Grenzübergang $k \rightarrow 0$ mit dem entsprechenden in ⁴⁾ vergleichen. Auch die Existenz der vorkommenden Integrale und die Zulässigkeit der Vertauschungen der Integrationsreihenfolgen lassen sich sofort nach ⁴⁾ sicherstellen.

Es bleibt nur noch eine Bemerkung über die Bedingung (4) nachzuholen. Diese Bedingung schränkt nicht, wie man zuerst glauben könnte, die Lösbarkeit der IGIS (1) und (2) willkürlich ein, sondern ist eine direkte Folgerung aus der Tatsache, daß die Kerne von (1) und (2) für reelles k periodisch sind mit der (primitiven) Periode $x_\mu - y_\nu = \frac{\pi}{k}$. Wäre nämlich (4) nicht erfüllt, so könnte man jedenfalls durch die Transformation $x'_\mu = x_\mu + l \frac{\pi}{k}$ (l eine passend gewählte ganze Zahl) dafür sorgen, daß sämtliche transformierten

Intervalle $\langle a'_\mu, b'_\mu \rangle$ auf eine Strecke der Länge π/k zu liegen kommen, oder, anders ausgedrückt, daß (4) jetzt befriedigt ist.

Falls die neuen Intervalle $\langle a'_\mu, b'_\mu \rangle$ punktfremd¹⁰⁾ bleiben, kann man dieselbe Transformation auch auf die y_ν anwenden und erhält damit die IGLS (1) und (2) in derselben Gestalt wieder, wobei die Bedingung (4) diesmal erfüllt ist. Bei diesem Falle ergeben sich also die IGLS (1) und (2) aus Systemen, bei denen die Bedingung (4) nicht verletzt ist, indem man von der durch die Periodizität der Kerne gegebenen Freiheit Gebrauch macht.

Haben jedoch die neuen Intervalle $\langle a'_\mu, b'_\mu \rangle$ innere Punkte gemein, so gibt es also solch einen Punkt $x_\varrho \in \langle a_\varrho, b_\varrho \rangle$ derart, daß auch $x_\sigma = x_\varrho + l \frac{\pi}{k}$ (l nach oben gewählt) innerer Punkt des Intervalls $\langle a_\sigma, b_\sigma \rangle$ ist. Wegen der Periodizität der Kerne von (1) und (2) müßte dann gelten $g_\varrho(x_\varrho) = g_\sigma(x_\sigma)$, d. h., die Funktionen $g_\mu(x_\mu)$ müßten überall dort, wo die nach oben transformierten Intervalle sich überdecken, übereinstimmen, könnten also nicht mehr willkürlich gewählt werden.

Also ergibt sich: Für reelle Werte von k mit $k > \frac{\pi}{b_n - a_1}$ sind die IGLS (1) und (2) i. a. nicht mehr für beliebige Funktionen $g_\mu(x_\mu)$ lösbar.

5. Hilfsformeln.

Vorbemerkungen. Der Beweis der trigonometrischen Umrechnungsformeln (9) bis (14) macht keine Schwierigkeiten.

Die Integrale (15) bis (20) lassen sich elementar berechnen, etwa, indem man die trigonometrischen Funktionen der Integranden nach 3. in rationale Funktionen umwandelt, worauf die Integration elementar ausführbar wird.

Von den Formeln (21) bis (29) genügt es, allein (25) zu beweisen, etwa unter Mitwirkung des IGLS (1) oder (2), wie in ⁴⁾ S. 91/92 für die entsprechende Formel des IGLS (3) durchgeführt. Die restlichen Formeln lassen sich dann durch einfache Umformungen, entsprechend zu ⁴⁾ S. 92/93, auf (25) zurückführen.

Die C_x ($x=1, 2, \dots, n$) in den Formeln (12), (13), (14), (23), (24) sollen gewisse Konstante bedeuten, die sich von Formel zu Formel im allgemeinen ändern werden. Da ihre genaue Bestimmung im Rahmen dieser Arbeit nicht notwendig ist, wurde darauf verzichtet, etwa durch weitere Indizes ihre Veränderlichkeit anzumerken.

Es werde $\text{sign } 0 = 0$ gesetzt, weiter sei

$$x_\nu, y_\nu, z_\nu \begin{cases} > b_\mu & \text{für } \nu > \mu \\ \in \langle a_\mu, b_\mu \rangle & \text{für } \nu = \mu \\ < a_\mu & \text{für } \nu < \mu. \end{cases}$$

$$(9) \quad \frac{1}{\sin(x-y)} = \text{ctg}(x-y) \frac{\sin(y-a)}{\sin(x-a)} + \frac{\cos(y-a)}{\sin(x-a)}$$

$$(10) \quad \text{ctg}(x-y) = \frac{\sin x \cos x + \sin y \cos y}{\sin^2 x - \sin^2 y}$$

¹⁰⁾ Bis eventuell auf die Endpunkte.

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{ctg}(x-y) \left[\left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\}^{\frac{2x-2}{x}} - \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\}^{\frac{2x-2}{y}} \right] \\ & = \pm (\sin x \cos x + \sin y \cos y) \sum_{\lambda=1}^{x-1} \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\}^{\frac{2\lambda-2}{x}} \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\}^{\frac{2x-2}{y} \frac{\lambda-2}{\lambda}} \end{aligned} \right\} \\ x = 1, 2, \dots$$

$$(12) \quad \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^n \sin(a_\lambda - x)} = \left\{ \begin{aligned} & \sum_{x=1}^n C_x \frac{1}{\sin(a_x - x)} & n = 2m + 1 \\ & \sum_{x=1}^n C_x \operatorname{ctg}(a_x - x) & n = 2m \end{aligned} \right\}$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \sigma}}^n \sin(a_\lambda - x) = \\ & = \left\{ \begin{aligned} & C_n + \cos x \sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} (C_{2x-1} \sin^{\frac{2x-1}{x}} + C_{2x} \cos^{\frac{2x-1}{x}}) & n = 2m + 1 \\ & \sum_{x=1}^{\frac{n}{2}} (C_{2x-1} \sin^{\frac{2x-1}{x}} + C_{2x} \cos^{\frac{2x-1}{x}}) & n = 2m \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \\ (\sigma = 1, \dots, n)^{8), 9)}$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\} \left(x - a_\sigma - \sum_{\varrho=1}^n \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2} \right) \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \sigma}}^n \sin(a_\lambda - x) = \\ & = \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\} \left(x - \sum_{\varrho=1}^n \frac{a_\varrho + b_\varrho}{2} \right) \sin^{\frac{n-1}{x}} + \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} (C_{2x-1} \sin^{\frac{2x-1}{x}} + C_{2x} \cos^{\frac{2x-1}{x}}) & n = 2m + 1 \\ & C_{n-1} + \cos x \sum_{x=1}^{\frac{n-2}{2}} (C_{2x-1} \sin^{\frac{2x-1}{x}} + C_{2x} \cos^{\frac{2x-1}{x}}) & n = 2m \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \\ (\sigma = 1, \dots, n)^{8), 9)}$$

$$(15) \quad \frac{k}{\pi} \int_{a_v}^{b_v} \frac{1}{\sin k(y_\mu - x_v)} \frac{dx_v}{\sin k(b_v - x_v) \sin k(x_v - a_v)} = \frac{\operatorname{sign}(\mu - v)}{\sin k(b_v - y_\mu) \sin k(a_v - y_\mu)}$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{k}{\pi} \int_{a_v}^{b_v} \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_v) \frac{\cos k\left(x_v - \frac{a_v + b_v}{2}\right)}{\sqrt{\sin k(b_v - x_v) \sin k(x_v - a_v)}} dx_v = \\ & = \frac{\operatorname{sign}(\mu - v) \cos k\left(y_\mu - \frac{a_v + b_v}{2}\right)}{\sqrt{\sin k(b_v - y_\mu) \sin k(a_v - y_\mu)}} \end{aligned} \right.$$

$$(17) \left\{ \begin{aligned} & \frac{k}{\pi} \int_{a_v}^{b_v} \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_v) \operatorname{ctg} k(z_\varrho - x_v) \left\{ \sqrt{\frac{\sin k(x_v - a_v)}{\sin k(b_v - x_v)}} \right\}^{\pm 1} dx_v = \\ & = -\sin k \frac{b_v - a_v}{2} \mp \operatorname{ctg} k(z_\varrho - y_\mu) \times \\ & \times \left[\operatorname{sign} |\varrho - v| \left\{ \sqrt{\frac{\sin k(a_v - z_\varrho)}{\sin k(b_v - z_\varrho)}} \right\}^{\pm 1} - \operatorname{sign} |\mu - v| \left\{ \sqrt{\frac{\sin k(a_v - y_\mu)}{\sin k(b_v - y_\mu)}} \right\}^{\pm 1} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(18) \left\{ \begin{aligned} & \frac{k}{\pi} \int_{a_v}^{b_v} \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_v) \frac{dx_v}{\sin k(z_\varrho - x_v) \sqrt{\sin k(b_v - x_v) \sin k(x_v - a_v)}} = \\ & = -\frac{\operatorname{sign}(\varrho - v) \operatorname{ctg} k(z_\varrho - y_\mu)}{\sqrt{\sin k(b_v - z_\varrho) \sin k(a_v - z_\varrho)}} + \\ & + \frac{\operatorname{sign}(\mu - v)}{\sin k(z_\varrho - y_\mu)} \frac{1}{\sqrt{\sin k(b_v - y_\mu) \sin k(a_v - y_\mu)}} \end{aligned} \right.$$

$$(19) \left\{ \begin{aligned} & \frac{k}{\pi} \int_{a_v}^{b_v} \frac{\sqrt{\sin k(b_v - x_v) \sin k(x_v - a_v)}}{\sin k(y_\mu - x_v)} dx_v = \\ & = \sin k \left(y_\mu - a_v + \frac{b_v}{2} \right) - \operatorname{sign}(\mu - v) \sqrt{\sin k(b_v - y_\mu) \sin k(a_v - y_\mu)} \end{aligned} \right.$$

$$(20) \left\{ \begin{aligned} & \frac{k}{\pi} \int_{a_v}^{b_v} \frac{\operatorname{ctg} k(y_\mu - x_v)}{\sin k(z_\varrho - x_v)} \sqrt{\sin k(b_v - x_v) \sin k(a_v - x_v)} dx_v = \\ & = -\cos k \left(z_\varrho - a_v + \frac{b_v}{2} \right) + \operatorname{sign}(\varrho - v) \operatorname{ctg} k(z_\varrho - y_\mu) \times \\ & \times \sqrt{\sin k(b_v - z_\varrho) \sin k(a_v - z_\varrho)} \end{aligned} \right.$$

$$(21) \left\{ \begin{aligned} & \frac{k}{\pi} \sum_{v=1}^n \int_{a_v}^{b_v} \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_v) \left\{ \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin k(a_\lambda - x_v)}{\sin k(b_\lambda - x_v)}} \right\}^{\pm 1} dx_v = \\ & = \mp \cos k \sum_{\varrho=1}^n \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2} \quad (\mu = 1, \dots, n) \end{aligned} \right.$$

für $a_\mu \leq y_\mu < b_\mu$ oder $a_\mu < y_\mu \leq b_\mu$ je nachdem, ob der Exponent $+1$ oder -1 ist.

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & \frac{k}{\pi} \sum_{v=1}^n \int_{a_v}^{b_v} \operatorname{ctg} k(z - x_v) \left\{ \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin k(a_\lambda - x_v)}{\sin k(b_\lambda - x_v)}} \right\}^{\pm 1} dx_v = \\ & = \pm \left[-\cos k \sum_{\varrho=1}^n \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2} + \left\{ \sqrt{\prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin k(a_\lambda - z)}{\sin k(b_\lambda - z)}} \right\}^{\pm 1} \right] \end{aligned} \right.$$

für $z > b_n$ oder $z < a_1$.

$$(23) \left\{ \begin{aligned} & \frac{k}{\pi} \sum_{v=1}^{n-1} (-1)^v \int_{a_v}^{b_v} \left\{ \frac{1}{\sin k(y_\mu - x_v)} \quad \begin{matrix} n = 2m + 1 \\ n = 2m \end{matrix} \right\} \times \\ & \times \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1} \sin k(b_\lambda - x_v) \sin k(a_\lambda - x_v)} dx_v = R_1(y_\mu) \quad (\mu = 1, \dots, n-1) \end{aligned} \right.$$

mit

$$\begin{aligned}
 R_1(y) &= \sum_{\kappa=1}^{n-1} C_{\kappa} \sin k \left(y - a_{\kappa} - \sum_{\varrho=1}^{n-1} \frac{b_{\varrho} - a_{\varrho}}{2} \right) \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \kappa}}^{n-1} \sin k(a_{\lambda} - y)^9 = \\
 &= C_{n-1} \sin k \left(y - \sum_{\varrho=1}^{n-1} \frac{a_{\varrho} + b_{\varrho}}{2} \right) \sin k y + \\
 &+ \left\{ \begin{aligned} &C_{n-2} + \cos k y \sum_{\kappa=1}^{\frac{n-3}{2}} (C_{2\kappa-1} \sin k y + C_{2\kappa} \cos k y) & n = 2m + 1 \\ &\sum_{\kappa=1}^{\frac{n-2}{2}} (C_{2\kappa-1} \sin k y + C_{2\kappa} \cos k y) & n = 2m \end{aligned} \right\}^9, \\
 (24) \quad &\left\{ \begin{aligned} &\frac{k}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu} \int_{a_{\nu}}^{b_{\nu}} \cos k \left(x_{\nu} - \frac{a_{\nu} + b_{\nu}}{2} \right) \begin{cases} \frac{1}{\sin k(y_{\mu} - x_{\nu})} & n = 2m + 1 \\ \operatorname{ctg} k(y_{\mu} - x_{\nu}) & n = 2m \end{cases} \\ &\times \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1} \sin k(b_{\lambda} - x_{\nu}) \sin k(a_{\lambda} - x_{\nu})} dx_{\nu} = R_2(y_{\mu}) \quad (\mu = 1, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \times
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 R_2(y) &= \sum_{\kappa=1}^n C_{\kappa} \cos k \left(y - a_{\kappa} - \sum_{\varrho=1}^n \frac{b_{\varrho} - a_{\varrho}}{2} \right) \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \kappa}}^n \sin k(a_{\lambda} - y)^9 = \\
 &= C_n \cos k \left(y - \sum_{\varrho=1}^n \frac{b_{\varrho} - a_{\varrho}}{2} \right) \sin k y + \\
 &+ \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\kappa=1}^{\frac{n-1}{2}} (C_{2\kappa-1} \sin k y + C_{2\kappa} \cos k y) & n = 2m + 1 \\ &C_{n-1} + \cos k y \sum_{\kappa=1}^{\frac{n-2}{2}} (C_{2\kappa-1} \sin k y + C_{2\kappa} \cos k y) & n = 2m \end{aligned} \right\}^8, \\
 (25) \quad &\left\{ \begin{aligned} &\frac{k}{\pi} \sum_{\nu=1}^n \int_{a_{\nu}}^{b_{\nu}} \operatorname{ctg} k(y_{\mu} - x_{\nu}) \operatorname{ctg} k(z - x_{\nu}) \left\{ \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin k(a_{\lambda} - x_{\nu})}{\sin k(b_{\lambda} - x_{\nu})}} \right\}^{\pm 1} dx_{\nu} = \\ &= -\sin k \sum_{\varrho=1}^n \frac{b_{\varrho} - a_{\varrho}}{2} \mp \operatorname{ctg} k(z - y_{\mu}) \left\{ \sqrt{\prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin k(a_{\lambda} - z)}{\sin k(b_{\lambda} - z)}} \right\}^{\pm 1} \end{aligned} \right\} \\
 &(\mu = 1, \dots, n)
 \end{aligned}$$

für $z > b_n$ oder $z < a_1$.

$$\begin{aligned}
 (26) \quad & \left\{ \frac{k}{\pi} \sum_{v=1}^{n-1} (-1)^v \int_{a_v}^{b_v} \operatorname{ctg} k(y_n - x_v) \begin{cases} \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_v) & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{\sin k(y_\mu - x_v)} & n = 2m \end{cases} \right. \\
 & \times \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1} \sin k(b_\lambda - x_v) \sin k(a_\lambda - x_v)} dx_v = \\
 & = (-1)^{n-1} \begin{cases} \operatorname{ctg} k(y_n - y_\mu) & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{\sin k(y_n - y_\mu)} & n = 2m \end{cases} \times \\
 & \times \sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n-1} \sin k(b_\lambda - y_n) \sin k(a_\lambda - y_n)} + \\
 & + \begin{cases} [R_1(y_\mu) - R_1(y_n)] \operatorname{ctg} k(y_n - y_\mu) & n = 2m + 1 \\ R_1(y_\mu) \operatorname{ctg} k(y_n - y_\mu) - \frac{R_1(y_n)}{\sin k(y_n - y_\mu)} & n = 2m \end{cases} \\
 & \quad (\mu = 1, \dots, n-1)
 \end{aligned}$$

mit $R_1(y)$ aus (23).

$$\begin{aligned}
 (27) \quad & \left\{ \frac{k}{\pi} \sum_{v=1}^{n-1} (-1)^v \int_{a_v}^{b_v} \frac{1}{\sin k(y_n - x_v)} \begin{cases} \frac{1}{\sin k(y_\mu - x_v)} & n = 2m + 1 \\ \operatorname{ctg} k(y_\mu - x_v) & n = 2m \end{cases} \right. \\
 & \times \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1} \sin k(b_\lambda - x_v) \sin k(a_\lambda - x_v)} dx_v = \\
 & = (-1)^{n-1} \begin{cases} \frac{1}{\sin k(y_n - y_\mu)} & n = 2m + 1 \\ \operatorname{ctg} k(y_n - y_\mu) & n = 2m \end{cases} \times \\
 & \times \sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n-1} \sin k(b_\lambda - y_n) \sin k(a_\lambda - y_n)} + \\
 & + \begin{cases} [R_1(y_\mu) - R_1(y_n)] \frac{1}{\sin k(y_n - y_\mu)} & n = 2m + 1 \\ \frac{R_1(y_\mu)}{\sin k(y_n - y_\mu)} - R_1(y_n) \operatorname{ctg} k(y_n - y_\mu) & n = 2m \end{cases} \\
 & \quad (\mu = 1, \dots, n)
 \end{aligned}$$

mit $R_1(y)$ aus (23).

$$\begin{aligned}
 (28) \quad & \left\{ \frac{k}{\pi} \sum_{v=1}^n (-1)^v \int_{a_v}^{b_v} \frac{1}{\sin k(y_\mu - x_v)} \frac{\prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq m}}^n \sin k(a_\kappa - x_v)}{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^n \sin k(b_\lambda - x_v) \sin k(a_\lambda - x_v)}} dx_v = 0 \right. \\
 & \quad (\mu, m = 1, \dots, n)^9
 \end{aligned}$$

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{k}{\pi} \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} \int_{a_{\nu}}^{b_{\nu}} \operatorname{ctg} k(y_{\mu} - x_{\nu}) \times \\ & \cos k \left(x_{\nu} - c_m - \sum_{\varrho=1}^n \frac{b_{\varrho} - a_{\varrho}}{2} \right) \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq m}}^n \sin k(a_{\kappa} - x_{\nu}) \\ & \times \frac{1}{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^n \sin k(b_{\lambda} - x_{\nu}) \sin k(a_{\lambda} - x_{\nu})}} dx_{\nu} = 0 \end{aligned} \right. \quad (\mu, m = 1, \dots, n)^9.$$

Nickel, Estafeta 11, Córdoba (Argentinien).

(Eingegangen am 13 Juni 1952.)

Über die Approximation schlichter konformer Abbildungen durch kongruente Iterationen spezieller sterniger oder konvexer konformer Abbildungen.

Von

HELMUT UNKELBACH.

Wenn man den Einheitskreis $|z_1| < 1$ durch eine analytische Funktion $z_2 = f_1(z_1)$ normiert (d.h. $f_1(0) = 0$ und $f_1'(0) > 0$) auf ein konvexes Teilgebiet $\mathfrak{R}_2$ des Kreises $|z_2| < 1$ abbildet, hierauf den Einheitskreis $|z_2| < 1$ in analoger Weise durch eine analytische Funktion $z_3 = f_2(z_2)$ auf ein konvexes Teilgebiet $\mathfrak{R}_3$ des Kreises $|z_3| < 1$ usw., bis zu einem konvexen Gebiet $\mathfrak{R}_{n+1}$, dann wird durch diese n -fach iterierte konforme Abbildung der Kreis $|z_1| < 1$ im allgemeinen zwar nicht auf ein konvexes, aber doch auf ein schlichtes Teilgebiet des Kreises $|z_{n+1}| < 1$ abgebildet. Hierbei entsteht die Frage, ob sich jede normierte, beschränkte und schlichte konforme Abbildung des Einheitskreises durch iterierte konvexe Abbildungen der soeben beschriebenen Art approximieren läßt. Diese Frage wird in den nachstehend bewiesenen Sätzen I und Ia in positivem Sinne beantwortet. Dabei wird sich noch zeigen, daß die Approximation sogar so durchgeführt werden kann, daß alle bei der Iteration benutzten Gebiete $\mathfrak{R}_\nu$ kongruent sind. Speziell können die Gebiete $\mathfrak{R}_\nu$ „Nahezu-Kreise“ sein im Sinne der nachstehenden Definition II ($1 - \theta < \varepsilon$). Statt der Gebiete $\mathfrak{R}_\nu$ können auch nichtkonvexe, sternige Gebiete und die zugehörigen Abbildungsfunktionen entsprechend den Voraussetzungen des Satzes I gewählt werden. Hierdurch wird der Satz von PESCHL¹⁾, wonach sich jede normierte, beschränkte und schlichte konforme Abbildung durch Iteration beschränkter elementarer Schlitzzabbildungen approximieren läßt, verallgemeinert.

Satz I läßt Anwendungen zu bei der Lösung der Frage, inwieweit sich gewisse Eigenschaften der Gesamtfamilie der normierten, beschränkten und schlichten analytischen Funktionen auf gewisse Teilfamilien übertragen lassen. Als Beispiel hierfür betrachten wir einen Problemkreis, der mit dem nachstehenden Ergebnis von DIEUDONNÉ²⁾ zusammenhängt:

Ist $f(z)$ eine unimodular beschränkte analytische Funktion, die im Punkte $z=0$ verschwindet, dann gilt für $|z| \leq \sqrt{2} - 1$

$$(1) \quad |f'(z)| \leq 1.$$

¹⁾ PESCHL, E.: Zur Theorie der schlichten Funktionen. J. angew. Math. **176**, S. 61—94 (1937).

²⁾ Siehe C. CARATHÉODORY, Funktionentheorie II, Basel 1950, S. 18. CARATHÉODORY hat den betreffenden Satz unabhängig von DIEUDONNÉ bewiesen. Der Satz enthält auch für $|z| > \sqrt{2} - 1$ die genaue obere Schranke von $|f'(z)|$ als Funktion von $|z|$.

Dagegen gibt es zu jedem Wert z_0 mit $|z_0| > \sqrt{2} - 1$ stets eine Funktion $f(z)$, für welche gilt

$$(2) \quad |f'(z_0)| > 1.$$

Die Ungleichung (2) wird bei DIEUDONNÉ und CARATHÉODORY durch Einheitsfunktionen zweiten Grades, also durch nichtschlichte Funktionen verifiziert. Hierbei ergibt sich zunächst die Frage, ob sich zu jedem Wert z_0 mit $|z_0| > \sqrt{2} - 1$ auch eine schlichte Funktion $f(z)$ angeben läßt, welche die Ungleichung (2) erfüllt, oder ob für die Familie der schlichten Funktionen $f(z)$ die Ungleichung (1) auch noch in einem größeren Kreis $|z| \leq \sqrt{2} - 1 + c$, $c > 0$ erfüllt ist. Diese Frage wird durch Satz II im ersteren Sinn beantwortet.

An dieses Ergebnis knüpfen weitere Fragen an, z.B.: Läßt sich zu jedem Wert z_0 mit $|z_0| > \sqrt{2} - 1$ auch eine konvexe Abbildungsfunktion $f(z)$ angeben, welche die Ungleichung (2) erfüllt, oder gilt für die Familie der konvexen Abbildungsfunktionen $f(z)$ die Ungleichung (1) auch noch in einem größeren Kreis $|z| \leq \sqrt{2} - 1 + c$? Diese Frage wird durch Satz III im ersteren Sinne beantwortet. Darüber hinaus zeigt Satz III, der als Folgerung aus den Sätzen I und II gewonnen wird, noch einen wesentlich allgemeineren Sachverhalt auf: Zu jedem Wert z_0 mit $|z_0| > \sqrt{2} - 1$ und jeder der in Satz I definierten Funktionenfolgen $\{S_k(z)\}$ läßt sich eine natürliche Zahl k_* finden, so daß die Funktion $S_{k_*}(z)$ die Ungleichung (2) erfüllt. Daraus folgt, daß der Kreis $|z| = \sqrt{2} - 1$ für die Familie der Funktionen $f(z)$ von ganz besonderer Bedeutung ist: Innerhalb dieses Kreises gilt stets die Ungleichung (1), während außerhalb dieses Kreises für gewisse Funktionen aus einer beliebigen Folge $\{S_k(z)\}$ und für gewisse Werte z_0 in beliebiger Nähe des Kreises auch die Ungleichung (2) gilt.

Satz I kann auch für die Lösung solcher Probleme von Nutzen sein, die mit der sog. „BIEBERBACHschen Vermutung“ ($a_n \leq n$) zusammenhängen. Obwohl sich diese Vermutung auf die Familie der beschränkten und nichtbeschränkten schlichten Funktionen bezieht, läßt sie sich bekanntlich auf ein Abschätzungsproblem der beschränkten schlichten Funktionen zurückführen. Die Schwierigkeiten beim Beweis dieser Vermutung sowie bei der Lösung gewisser verwandter Abschätzungsprobleme beruhen zum Teil darauf, daß das Bildungsgesetz der Koeffizienten der elementaren beschränkten Schlitzabbildungsfunktionen — vor allem in der Iteration — nicht leicht zu übersehen ist, trotz der Einfachheit des Bildgebietes. Demgegenüber ergibt sich durch Satz I eine reiche Auswahl von Folgen von Funktionen $S_k(z)$, deren kongruente Iterationen eine beliebige schlichte Funktion $f(z)$ approximieren. Unter den Folgen $\{S_k(z)\}$ lassen sich möglicherweise auch solche finden, bei welchen das Bildungsgesetz der Koeffizienten leichter zu übersehen ist als bei den elementaren beschränkten Schlitzabbildungen. Solche Funktionenfolgen könnten dann einen Zugang zu allgemeinen Abschätzungen der Koeffizienten der schlichten Funktionen eröffnen. Wir definieren nun zunächst den Begriff der kongruenten Iteration:

Definition I. Ist $w=f(z)$ eine Funktion, welche die Bedingungen des SCHWARZschen Lemmas erfüllt, so bezeichnen wir die Funktion

$$z_{n+1} = F_n(z_1) \equiv f_n(f_{n-1}(\dots(f_1(z_1))\dots))$$

als eine kongruente Iteration der Funktion $f(z)$, wenn jede Funktion $z_{r+1} = f_r(z_r)$ aus $w=f(z)$ durch eine Drehung

$$z_{r+1} = e^{i\psi_r} z_r, \quad z_r = e^{i\theta_r} z$$

der Kreise $|w| < 1$ und $|z| < 1$ hervorgeht.

Um den Begriff „Nahezu-Kreise“ fixieren zu können, wollen wir noch für beschränkte konvexe Gebiete ein „Maß der Konvexität“ einführen, welches wir mit Θ bezeichnen und folgendermaßen definieren:

Definition II. Ist $\mathfrak{K}$ ein beschränktes konvexes Gebiet, R_1 der Radius des kleinsten Kreises, welcher $\mathfrak{K}$ in seinem Innern enthält, und ist R_2 die obere Grenze der Radien der Kreise, deren Peripherie mit dem Rand von $\mathfrak{K}$ mehr als zwei Punkte gemeinsam haben, dann ist das Maß der Konvexität Θ von $\mathfrak{K}$ definiert durch

$$\Theta = \frac{R_1}{R_2}.$$

Aus Definition II folgt man, daß Θ alle Werte des abgeschlossenen Intervalls $0 \leq \Theta \leq 1$ annimmt. Für $\Theta = 1$ ist $\mathfrak{K}$ ein Kreis und $\Theta = 0$ ergibt sich z.B. in denjenigen Fällen, in welchen der Rand von $\mathfrak{K}$ ein geradliniges Stück enthält. Durch $1 - \Theta$ wird gewissermaßen die Abweichung des Gebietes $\mathfrak{K}$ von der Kreisgestalt gemessen.

Mit Benutzung der vorstehenden Definitionen können wir die folgenden Sätze formulieren:

Satz I. $\{\mathfrak{E}_k\}$ sei eine Folge von einfach zusammenhängenden schlichten Gebieten der w -Ebene, welche folgende Voraussetzungen erfüllen:

1. $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{E}_2 \subseteq \mathfrak{E}_3 \subseteq \dots$.
2. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{E}_1 \dot{+} \mathfrak{E}_2 \dot{+} \mathfrak{E}_3 \dot{+} \dots$ ist der Einheitskreis $|w| < 1$.
3. Alle Gebiete $\mathfrak{E}_k$ sind vom Einheitskreis $|w| < 1$ verschieden.
4. Jedes Gebiet $\mathfrak{E}_k$ hat ein zusammenhängendes Randstück der Länge β_k mit dem Kreis $|w|=1$ gemeinsam und es ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 2\pi$.
5. Setzt man $w = \varrho \cdot e^{i\psi}$, dann sei der Rand von $\mathfrak{E}_k$ als eindeutige Funktion $\varrho = \varrho_k(\psi)$ darstellbar³⁾, welche
 - a) stückweise analytisch (d.h. analytisch mit Ausnahme endlich vieler Stellen, an denen die Funktion sowohl nach rechts als auch nach links differenzierbar ist),
 - b) gerade, d.h. $\varrho_k(\psi) = \varrho_k(-\psi)$,
 - c) im Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi$ monoton nicht zunehmend ist.

Bezeichnen wir dann mit $w = S_k(z)$ diejenige Funktion, welche den Einheitskreis $|z| < 1$ auf $\mathfrak{E}_k$ normiert abbildet, dann läßt sich jede normierte, unimodular

³⁾ Hieraus folgt insbesondere, daß die Gebiete $\mathfrak{E}_k$ sternig sind.

beschränkte und schlichte Funktion $F(z_1)$ im Kreise $|z_1| < 1$ durch kongruente Iterationen

$$(3) \quad z_{n+1} = F_{k,n}(z_1) \equiv f_{k,n}(f_{k,n-1}(\dots(f_{k,1}(z_1))\dots)) \\ n = n(k)$$

der Funktion $w = S_k(z)$ approximieren⁴⁾, d.h.

$$F(z_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{k,n(k)}(z_1).$$

Unter den Folgerungen dieses Satzes erscheint die folgende bemerkenswert:

Satz Ia. Zu jeder beliebig vorgegebenen Folge von Zahlen Θ_k im halboffenen Intervall $0 \leq \Theta < 1$ gibt es stets eine Folge konvexer Gebiete $\mathbb{R}_k$ mit den Maßen der Konvexität Θ_k , so daß man eine beliebige normierte, unimodular beschränkte und schlichte analytische Funktion $F(z)$ durch kongruente Iterationen der normierten Abbildungsfunktionen des Einheitskreises auf $\mathbb{R}_k$ approximieren kann.

An Satz Ia erscheint auffallend, daß die Approximation auch im Falle $\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta_k = 1$ möglich ist, während man doch nur identische Abbildungen erhalten würde, wenn entgegen der Voraussetzung 3. von Satz I alle $\Theta_k = 1$ wären.

Beweis von Satz I. Auf Grund des S. 63 erwähnten Satzes von PESCHL kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Funktion $Z = F(z_1)$ den Kreis $|z_1| < 1$ auf ein elementares Schlitzgebiet $\mathfrak{Z}$ normiert abbildet, welches aus dem Kreis $|Z| < 1$ durch Aufschlitzen längs eines Stückes der negativen reellen Halbachse entsteht. Es wird sich zeigen, daß man für eine derartige Schlitzabbildung die Approximation so durchführen kann, daß die in Definition I enthaltenen Größen $\psi_\nu = \vartheta_\nu = 0$ sind, d.h.

$$(4) \quad f_{k,1}(z) \equiv f_{k,2}(z) \equiv \dots \equiv f_{k,n}(z) \equiv S_k(z).$$

Wir setzen nun $S'_k(0) = \alpha_k$ und $F'(0) = \alpha$. Wegen Voraussetzung 3. ist $\alpha_k < 1$ und wegen Voraussetzung 1. und 2. ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 1$. Außerdem können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $F(z_1) \neq z_1$, also $\alpha < 1$ ist, weil im Falle $F(z_1) = z_1$ die Behauptung von Satz I wegen $z_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(z_1)$ trivialerweise erfüllt ist. Es gibt deshalb ein k_0 , so daß

$$\alpha_k \geq \alpha \quad \text{für alle } k > k_0.$$

Für diese Werte k definieren wir die ganzzahlige Funktion $n(k)$, wobei n eine natürliche Zahl bedeutet, durch die Ungleichungen

$$(5) \quad \alpha_k^{n_k} \geq \alpha, \quad \alpha_k^{n_k+1} < \alpha$$

und wir behaupten, daß unter den Voraussetzungen (4) und (5) und bei Benutzung der Schreibweise (3) die Gleichung gilt

$$(6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F_{k,n(k)}(z_1) = F(z_1).$$

⁴⁾ Gemeint ist natürlich, daß es sich in jedem Kreise $|z| \leq r < 1$ um eine gleichmäßige Approximation handelt.

Um diese Gleichung zu beweisen, muß man zeigen, daß die schlichten Teilgebiete $\mathfrak{S}_k^n$ des Kreises $|z_{n+1}| < 1$, auf welche die Funktionen $z_{n+1} = F_{k,n}(z_1)$ den Kreis $|z_1| < 1$ abbilden, den Kern $\mathfrak{S}$ besitzen und gegen diesen Kern konvergieren⁵⁾. Dies ist der Fall, wenn man zwei Folgen gegen Null konvergierender positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$ und $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots$ finden kann, welche folgende Bedingungen erfüllen:

I. Die nicht auf dem Kreis $|z_{n+1}| = 1$ liegenden Randpunkte von $\mathfrak{S}_k^n$ liegen in dem Kreissektor $|\arg z_{n+1}| > \pi - \varepsilon_k$.

II. Alle Randpunkte von $\mathfrak{S}_k^n$ liegen außerhalb des Kreises $|z_{n+1}| = R - \delta_k$, wobei der innerste Punkt des Schlitzes von $\mathfrak{S}$ mit $Z = -R$ bezeichnet ist.

Die Zahlen ε_k wollen wir mit Hilfe der nach Voraussetzung 4. existierenden Kreisbogen der Länge β_k definieren. Für diese Kreisbogen besagen die Voraussetzungen 5b) und 5c), daß sie zur reellen Achse symmetrisch liegen und den Punkt $z_2 = 1$ enthalten, und Voraussetzung 3., daß sie den Punkt $z_2 = -1$ nicht enthalten. Die Endpunkte der Kreisbogen sind deshalb

$$z_2 = e^{i \frac{\beta_k}{2}} \quad \text{und} \quad z_2 = e^{-i \frac{\beta_k}{2}}.$$

Wir setzen nun

$$(8) \quad \varepsilon_k = \pi - \frac{\beta_k}{2},$$

d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$. Dann liegt jedenfalls der Rand von $\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}_k^1$, so weit er nicht mit einem Teil des Kreises $|z_2| = 1$ zusammenfällt, innerhalb des Kreissektors $|\arg z_2| > \pi - \varepsilon_k$.

Für den Fall, daß $n(k) > 1$ ist, müssen wir von diesem Kreissektor das Bild untersuchen, welches die Funktion $z_3 = S_k(z_2)$ in der z_3 -Ebene entwirft. Setzen wir $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, dann folgt aus Voraussetzung 5a) und 5c), daß für $0 \leq \varphi_2 \leq \pi$ und $r_2 = 1$

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \log |S_k(z_2)| \leq 0$$

mit Ausnahme höchstens endlich vieler Sprungstellen der linken Seite von (9). An den Sprungstellen ergeben sich verschiedene rechte und linke Differentialquotienten, die ebenfalls ≤ 0 sind. Eine einfache Umrechnung zeigt, daß die Ungleichung (9) gleichbedeutend ist mit

$$(10) \quad \Re \left\{ \frac{z_2 S'_k(z_2)}{S_k(z_2)} \right\} \geq 0.$$

Andererseits muß es sich wegen Voraussetzung 5b) und wegen der Normierung um eine reelle Abbildungsfunktion handeln, d.h.

$$(11) \quad \Im \left\{ \frac{z_2 S'_k(z_2)}{S_k(z_2)} \right\} = 0 \quad \text{für alle reelle } z_2 > -1.$$

Auf der linken Seite von (10) und (11) steht eine Potentialfunktion, die im oberen Halbkreis des Einheitskreises ($0 < \varphi_2 < \pi$, $r_2 < 1$) regulär ist und die deshalb ihre Extremalwerte auf dem Rande des Halbkreises annimmt. Hierbei

⁵⁾ Vgl. hierzu etwa BIEBERBACH, L: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II, S. 12ff. Leipzig u. Berlin 1931.

liegen die Randwerte in einer Sprungstelle nach einem bekannten Satz über Potentialfunktionen zwischen den Werten des betreffenden rechten und des linken Differentialquotienten, der an die Stelle der linken Seite von (9) tritt. Deshalb müssen die Ungleichungen (9) und (10) im ganzen oberen Halbkreis gültig sein. Im unteren Halbkreis sind die Zeichen $\leq$ bzw. $\geq$ durch $\geq$ bzw. $\leq$ zu ersetzen.

Nun wollen wir den Radiusvektor $z_2 = r_2 e^{i\beta_k/2}$, $0 < r_2 < 1$ mit seinem Bild in der z_3 -Ebene vergleichen. Zu diesem Zweck beachten wir, daß auf diesem Radiusvektor die Ungleichung gilt:

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial r} \arccos S_k(z_2) \geq 0.$$

Diese Ungleichung folgt aus dem oben Bewiesenen, da die linke Seite von (12) durch eine einfache Umformung übergeht in

$$(13) \quad \Im \left\{ e^{i\frac{\beta_k}{2}} \frac{S'_k(z_2)}{S_k(z_2)} \right\} = \frac{1}{r_2} \Im \left\{ \frac{z_2 S'_k(z_2)}{S_k(z_2)} \right\}.$$

Außerdem ist wegen der Normierung $S'_k(0) > 0$ auf dem Radiusvektor

$$(14) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \arccos S_k(z) = \frac{\beta_k}{2}$$

Aus (12) und (14) folgt

$$(15a) \quad \arccos S_k(z_2) \geq \frac{\beta_k}{2} \quad \text{für} \quad \arccos z_2 = \frac{\beta_k}{2}$$

und analog beweist man, daß

$$(15b) \quad \arccos S_k(z_2) \leq -\frac{\beta_k}{2} \quad \text{für} \quad \arccos z_2 = -\frac{\beta_k}{2}.$$

Der Kreissektor $|\arccos z_2| \geq \frac{\beta_k}{2}$ wird also durch die Funktion $z_3 = S_k(z_2)$ auf ein Teilgebiet des Sektors $|\arccos z_3| \geq \frac{\beta_k}{2}$ abgebildet und die iterierte Funktion $z_3 = S_k(S_k(z_1)) \equiv S_k(z_2)$ bildet den Kreis $|z_1| < 1$ auf ein Gebiet $\Im_k^2$ ab, dessen Rand nur auf der Kreisperipherie $|z_3| = 1$ und innerhalb des Sektors $|\arccos z_3| \geq \frac{\beta_k}{2}$ verläuft. Für Gebiete mit $n > 2$ wird der Beweis in analoger Weise durchgeführt. Damit ist die Gültigkeit der Bedingung I. bewiesen.

Es ist jetzt noch die Existenz einer Folge $\{\delta_k\}$ nachzuweisen, welche die Bedingung II. erfüllt. Würde eine solche Folge nicht existieren, dann gäbe es eine Zahl δ_0 mit $0 < \delta_0 < R$, so daß der Kreis $|z_{n-1}| \leq R - \delta_0$, $n = n(k)$ für beliebig große k Randpunkte von $\Im_k^n$ enthalten würde. Wegen Voraussetzung 5c) würde dann der Schlitz $-1 \leq z_{n-1} \leq -R + \delta_0$ nirgends innerhalb der betreffenden Gebiete $\Im_k^n$ liegen. Die zu diesem Schlitz gehörige normierte elementare Schlitzabbildung bezeichnen wir mit $Z = F(z, \delta_0)$, d. h. $F(z, 0) = F(z)$. Dann ist

$$(16) \quad F'(0, \delta_0) < \alpha \quad \text{für} \quad 0 < \delta_0 < R.$$

Bezeichnen wir die Umkehrfunktion von $Z = F(z, \delta_0)$ bei festem δ_0 mit $z = \bar{F}(Z, \delta_0)$, dann erfüllt die Funktion

$$z^* = \bar{F}(F_{k,n}(z), \delta_0)$$

für gewisse, beliebig große k die Bedingungen des SCHWARZschen Lemmas. Also gilt für die betreffenden k

$$\left| \frac{dz^*}{dz} \right|_{z=0} \leq 1$$

oder

$$(17) \quad \frac{F'_{k,n}(0)}{F'(0, \delta_0)} \leq 1.$$

Andererseits folgt aus (5)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F'_{k,n}(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k^{n(k)} = \alpha.$$

Deshalb folgt aus (17)

$$(18) \quad F'(0, \delta_0) \geq \alpha.$$

Zwischen (16) und (18) besteht ein Widerspruch. Also war die Annahme, daß keine Folge $\{\delta_k\}$ der verlangten Art existiert, falsch. Damit ist die Gl. (6), welche die Aussage von Satz I enthält, vollständig bewiesen.

Satz Ia ergibt sich unmittelbar als Folgerung aus Satz I, weil man als Gebiete $\mathfrak{E}_k$ speziell auch Kreisbogenzweiecke mit dem Maß der Konvexität Θ_k wählen kann, sofern $\Theta_k < 1$ ist.

Um die bereits in der Einleitung beschriebene Anwendungsmöglichkeit von Satz I darzutun, beweisen wir zunächst

Satz II. Zu jedem Wert z_0 mit $|\bar{2} - 1| < |z_0| < 1$ läßt sich eine Funktion $s(z)$ finden, welche den Kreis $|z| < 1$ auf ein elementares, unimodular beschränktes Schlitzgebiet abbildet und im Punkte $z=0$ verschwindet, so daß folgendes gilt:

$$(19) \quad |s'(z_0)| > 1.$$

Beweis. Eine Funktion $w = s(z)$, bei welcher das Bildgebiet des Kreises $|z| < 1$ durch radiales Aufschlitzen des Kreises $|w| < 1$ vom Punkte $w = -1$ aus gewonnen wird und $s'(0) > 0$ ist, läßt sich bekanntlich darstellen durch

$$(20) \quad \frac{w}{(1-w)^2} = \alpha \cdot \frac{z}{(1-z)^2}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Daraus errechnet man

$$w = 1 + \frac{(1-z)^2}{2\alpha z} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha z}{(1-z)^2}} \right)$$

und außerdem, wenn man $\varepsilon = 1 - \alpha$ setzt,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{2(1-\varepsilon)z(1+z) - (1-z^2) \left[\sqrt{(1+z)^2 - 4\varepsilon z} - (1-z) \right]}{2(1-\varepsilon)z^2 \sqrt{(1+z)^2 - 4\varepsilon z}}.$$

Bei den Quadratwurzeln dieser Ausdrücke ist derjenige Zweig zu wählen, bei welchem sich für $z=0$ der Wert Eins ergibt. Entwickelt man den letzten Ausdruck nach Potenzen von ε , so findet man

$$(24) \quad \frac{dw}{dz} = 1 - \varepsilon \cdot g(z) + o(\varepsilon).$$

Dabei ist

$$g(z) = \frac{1 - z(z+2)}{(1+z)^2}.$$

Die Funktion $g(z)$ hat im Kreis $|z| < 1$ genau eine Nullstelle, und zwar im Punkte $z = \sqrt{2} - 1$. Für $z_0 > \sqrt{2} - 1$ ist $g(z_0) < 0$. Aus (21) folgt deshalb, daß für jeden festen Wert $z_0 > \sqrt{2} - 1$ die Größe ε so klein gewählt werden kann, daß $\left| \frac{dw}{dz} \right| > 1$ ist. Damit ist Satz II für positive Werte von z_0 bereits bewiesen. Für die anderen Werte von z_0 mit $|z_0| > \sqrt{2} - 1$ ergibt sich der Satz durch entsprechende Drehung der z - und w -Ebene.

Aus den Sätzen I, Ia und II folgt der nachstehende

Satz III. *Ist $\{S_k(z)\}$ irgendeine Folge von Funktionen, welche die Voraussetzungen von Satz I erfüllen, dann gibt es zu jedem Wert z_0 mit $\sqrt{2} - 1 < |z_0| < 1$ eine natürliche Zahl k_* , so daß folgendes gilt*

$$(22) \quad |S'_{k_*}(z_0)| > 1.$$

Hierbei kann die Folge der Funktionen $S_k(z)$ insbesondere so gewählt werden, daß diese den Einheitskreis auf konvexe Gebiete $\mathbb{R}_k$ mit beliebig vorgegebenen Maßen der Konvexität $\Theta_k < 1$ abbilden.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, es gäbe eine Größe $c > 0$, so daß für jede Funktion irgendeiner Folge $\{S_k(z)\}$ im Kreise $|z| \leq \sqrt{2} - 1 + c$ stets gilt

$$|S'_k(z)| \leq 1.$$

Dann ist gemäß (3) und nach Definition I

$$(23) \quad |f'_{k,v}(z_v)| = |S'_k(e^{-i\varphi_v} z_v)| \leq 1 \quad \text{für} \quad |z_v| < \sqrt{2} - 1 + c, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Außerdem folgt aus dem SCHWARZschen Lemma

$$(24) \quad |z_{v+1}| = |f_{k,v}(z_v)| \leq |z_v| \quad \text{für} \quad v = 1, 2, \dots, n-1.$$

Dann ergibt sich aus (3), (23) und (24)

$$(25) \quad |F'_{k,n}(z_1)| = |f'_{k,1}(z_1)| \cdot |f'_{k,2}(z_2)| \cdots |f'_{k,n}(z_n)| \leq 1$$

für alle z_1 mit $|z_1| < \sqrt{2} - 1 + c$. Aus (25), Satz I und Satz II ergibt sich nunmehr ohne weiteres ein Widerspruch. Also gibt es keine Größe c mit der oben angenommenen Eigenschaft. Es gibt deshalb in beliebiger Nähe des Kreises $|z| = \sqrt{2} - 1$ für eine beliebige Folge $\{S_k(z)\}$ Werte z_0 und zugehörige natürliche Zahlen k_* , so daß die Ungleichung (22) erfüllt ist. Dann muß aber dieselbe Aussage für alle Werte z_0 des Kreisringes $\sqrt{2} - 1 < |z_0| < 1$ zutreffen. Denn würde sie für einen Wert z_0 des Kreisringes nicht zutreffen, dann würde dasselbe für den ganzen Kreis $|z| = |z_0|$ gelten. Nach dem Satz vom Maximum des absoluten Betrages einer analytischen Funktion könnte dann die Aussage auch im Innern des Kreises $|z| < |z_0|$ nicht zutreffen, was dem oben Bewiesenen widerspricht. Damit ist die erste Aussage von Satz III bewiesen.

Die letzte Aussage von Satz III ist eine unmittelbare Folge aus Satz Ia.

Bonn, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 4. August 1952.)

Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. II.

Von
 HANS-EGON RICHERT.

7. Im ersten Teil dieser Arbeit⁹⁾ habe ich für die summatorische Funktion $A_0(x)$ der Anzahl der wesentlich verschiedenen ABELSchen Gruppen der Ordnung n , $a_0(n)$, mit gewissen Konstanten c_ν , $\nu = 1, 2, 3$, die asymptotische Entwicklung

$$A_0(x) = c_1 x + c_2 x^{\frac{1}{2}} + c_3 x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{1}{6}} \log^{\frac{5}{6}} x)$$

hergeleitet. Vor einiger Zeit hat nun ŠAPIRO-PYATECKIJ¹⁰⁾ in einer Abhandlung auch die Funktion $A_0(x; q, l) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{q}}} a_0(n)$ studiert und für $(q, l) = 1$ das Resultat

$$(34) \quad A_0(x; q, l) = c_1(q) x + O(x^{\frac{1}{2} + \epsilon} q^{\frac{1}{2}})$$

erhalten.

Hier soll gezeigt werden, daß der in I beschrittene Weg über (34) hinaus zu der Entwicklung

$$A_0(x; q, l) = c_1(q) x + c_2(q) x^{\frac{1}{2}} + c_3(q) x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{1}{6}} \log^{\frac{5}{6}} x q^{\frac{5}{6}})$$

(Satz 5) führt.

Wie in I das Lemma 8, ist hier das Lemma 17 das wesentliche Hilfsmittel, das in seiner Allgemeinheit auch für eine ganze Reihe weiterer zahlentheoretischer Abschätzungen anwendbar bleibt und daher auch ein selbständiges Interesse beanspruchen dürfte.

Zweckmäßigerweise führen wir die Numerierung von I weiter und behalten auch die dortige Bezeichnungsweise bei.

Zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen haben wir uns für einen Charakter χ modulo q , wie bei der Herleitung von (1), lediglich von der Richtigkeit von

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \chi(p^\nu) a_0(p^\nu) p^{-\nu s} = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - \chi(p^\nu) p^{-\nu s})^{-1}, \quad \sigma > 0,$$

zu überzeugen. Hieraus folgt

$$(35) \quad Z_0(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) a_0(n) n^{-s} = \prod_{\nu=1}^{\infty} L(\nu s, \chi^\nu) \quad \text{für } \sigma > 1.$$

⁹⁾ RICHERT, H.-E.: Math. Z. **56**, 21—32 (1952), im folgenden kurz mit I zitiert.

¹⁰⁾ ŠAPIRO-PYATECKIJ, I. I.: Mat. Sbornik, N. S. **26** (68), 479—486 (1950).

8. Es seien

x reell, hinreichend groß,

$$(36) \quad 2 \leq q, \text{ natürlich,}$$

$\chi, \chi_0, \chi_1, \chi_2$ seien Charaktere modulo q , χ_0 der Hauptcharakter. Mit χ_1 werde falls er existiert, der Charakter mit

$$(37) \quad \chi_1^2 = \chi_0, \quad \chi_1 \neq \chi_0$$

und mit χ_2 , falls diese existieren, diejenigen Charaktere mit

$$(38) \quad \chi_2^3 = \chi_0, \quad \chi_2 \neq \chi_0$$

bezeichnet. Ferner seien

$$(39) \quad Z_1(s, \chi) = L(s, \chi) L(2s, \chi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n, \chi) n^{-s}, \quad \sigma > 1,$$

$$(40) \quad Z_2(s, \chi) = L(s, \chi) L(2s, \chi^2) L(3s, \chi^3) = \sum_{n=1}^{\infty} a_2(n, \chi) n^{-s}, \quad \sigma > 1,$$

$$(41) \quad Z_3(s, \chi) = \prod_{v=4}^{\infty} L(v s, \chi^v) = \sum_{n=1}^{\infty} a_3(n, \chi) n^{-s}, \quad \sigma > \frac{1}{4},$$

$$(42) \quad Z_4(s, \chi) = \prod_{v=5}^{\infty} L(v s, \chi^v) = \sum_{n=1}^{\infty} a_4(n, \chi) n^{-s}, \quad \sigma > \frac{1}{5},$$

$$A_0(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n) a_0(n),$$

$$A_v(x, \chi) = \sum_{n \leq x} a_v(n, \chi), \quad v = 1, 2, 3, 4,$$

$$(43) \quad c_\mu(\chi) = \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq \mu}}^{\infty} L\left(\frac{v}{\mu}, \chi^v\right), \quad \mu = 1, 2, 3,$$

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+w)^{-s}, \quad 0 < w \leq 1, \quad \sigma > 1,$$

$\varphi(q), \mu(q)$ beziehentlich die EULERSche und die MÖBIUSSche Funktion,

$$(44) \quad S_1(x, q) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{t|q} \mu(t) \sum_{\substack{m \leq \frac{x}{d^2 t}}} \psi\left(\frac{x}{d^2 t m^2}\right),$$

$$(45) \quad S_2(x, q) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{t|q} \mu(t) \sum_{\substack{m \leq \frac{\sqrt{x}}{d t}}} \psi\left(\frac{\sqrt{x}}{d t m}\right),$$

$$(46) \quad S_3(x, q) = \sum_{h \leq q} \chi_1(h) \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{m \leq \frac{x}{d^2}}} \psi\left(\frac{x}{q d^2 m^2} - \frac{h}{q}\right),$$

$$(47) \quad S_4(x, q) = \sum_{h \leq q} \chi_1(h) \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{m \leq x \frac{1}{d} \\ m \equiv h \pmod{q}}} \psi\left(\frac{\sqrt{x}}{d\sqrt{m}}\right),$$

$$(48) \quad S_5(x, q) = S_5(x, q, \chi) = \sum_{h \leq q} \chi(h) \sum_{j \leq q} \chi^2(j) \sum_{\substack{m \leq x \frac{1}{j} \\ m \equiv j \pmod{q}}} \psi\left(\frac{x}{q m^2} - \frac{h}{q}\right),$$

$$(49) \quad S_6(x, q) = S_6(x, q, \chi) = \sum_{h \leq q} \chi^2(h) \sum_{j \leq q} \chi(j) \sum_{\substack{m \leq x \frac{1}{j} \\ m \equiv j \pmod{q}}} \psi\left(\frac{\sqrt{x}}{q m} - \frac{h}{q}\right).$$

$\sum_{a \leq n \leq b}$ bedeute für $b < a$ als leere Summe Null. Die O -Konstanten sind im allgemeinen absolute und hängen nur vorübergehend von ε , über das dann alsbald verfügt wird, ab.

9. Vorerst noch vier Hilfssätze:

Lemma 13. Ist $f(n)$ eine zahlentheoretische Funktion, so gilt

$$\sum_{\substack{n \leq \omega \\ (n, q) = 1}} f(n) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{m \leq \frac{\omega}{d} \\ m \equiv d \pmod{q}}} f(md).$$

Beweis. Es ist

$$\sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{m \leq \frac{\omega}{d} \\ d|q}} f(md) = \sum_{\substack{md \leq \omega \\ d|q}} \mu(d) f(md) = \sum_{n \leq \omega} \left(\sum_{\substack{d|q \\ d|n}} \mu(d) \right) f(n) = \sum_{\substack{n \leq \omega \\ (n, q) = 1}} f(n).$$

Lemma 14. Es seien ω , w und κ drei reelle Zahlen, $\omega > 0$, $0 < w \leq 1$, $0 < \kappa \neq 1$. Dann ist

$$\sum_{0 \leq v \leq \omega} (v + w)^{-\kappa} = \zeta(\kappa, w) - \frac{1}{\kappa - 1} \omega^{1-\kappa} - \psi(\omega) \omega^{-\kappa} + w \omega^{-\kappa} + O(\omega^{-\kappa-1}).$$

Beweis. Wie bei Lemma 2.

Lemma 15. Es ist

$$A_3(x, \chi) = O(x^{\frac{1}{4}}).$$

Beweis. Nach (41) und (42) haben wir

$$A_3(x, \chi) = \sum_{n \leq x} a_3(n, \chi) = \sum_{m^4 n \leq x} \chi^4(m) a_4(n, \chi) = \sum_{n \leq x} a_4(n, \chi) \sum_{\substack{m \leq \sqrt[4]{\frac{x}{n}} \\ m \equiv 1 \pmod{q}}} \chi^4(m),$$

folglich wegen

$$(50) \quad |a_r(n, \chi)| \leq a_r(n, \chi_0) \quad \text{für } r = 1, 2, 3, 4,$$

und da $Z_4(s, \chi_0)$ für $\sigma > \frac{1}{5}$ absolut konvergiert,

$$|A_3(x, \chi)| \leq \sum_{n \leq x} |a_4(n, \chi)| \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{4}} \leq x^{\frac{1}{4}} \sum_{n \leq x} a_4(n, \chi_0) n^{-\frac{1}{4}} = O(x^{\frac{1}{4}}).$$

Lemma 16. Für $\delta > \frac{1}{4}$ ist

$$\sum_{n \leq x} a_3(n, \chi) n^{-\delta} = Z_3(\delta, \chi) + O(x^{1-\delta}).$$

Beweis. Wegen der absoluten Konvergenz von $Z_3(s, \chi)$ für $\sigma > \frac{1}{4}$ ist nach Lemma 15 für $\delta > \frac{1}{4}$

$$\sum_{n \leq x} a_3(n, \chi) n^{-\delta} - Z_3(\delta, \chi) = - \sum_{n > x} (A_3(n, \chi) - A_3(n-1, \chi)) n^{-\delta} = O(x^{1-\delta}).$$

10. Wir wollen zunächst $A_1(x, \chi)$ berechnen. Nach Lemma 1 gilt für jeden Charakter χ modulo q

$$(51) \quad \begin{cases} A_1(x, \chi) = \sum_{m^2 n \leq x} \chi^2(m) \chi(n) \\ = \sum_{m \leq x^{\frac{1}{2}}} \chi^2(m) \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{m^2} \\ (n, q) = 1}} \chi(n) + \sum_{\substack{n \leq x^{\frac{1}{2}} \\ (n, q) = 1}} \chi(n) \sum_{m \leq \sqrt{\frac{x}{n}}} \chi^2(m) - \sum_{\substack{n \leq x^{\frac{1}{2}} \\ (n, q) = 1}} \chi(n) \sum_{m \leq x^{\frac{1}{2}}} \chi^2(m). \end{cases}$$

Für den Hauptcharakter χ_0 folgt hieraus nacheinander mit Lemma 13, (9), Lemma 2, (44) und (45)

$$\begin{aligned} A_1(x, \chi_0) &= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{m \leq x^{\frac{1}{2}} \\ (m, q) = 1}} \left[\frac{x}{dm^2} \right] + \sum_{d, q} \mu(d) \sum_{\substack{m \leq x^{\frac{1}{2}} \\ (m, q) = 1}} \left[\frac{1}{d} \sqrt{\frac{x}{m}} \right] - \left(\sum_{d, q} \mu(d) \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{d} \right] \right)^2 \\ &= - \sum_{d, q} \mu(d) \sum_{t|q} \mu(t) \sum_{\substack{m \leq \frac{x}{dt^2 m^2} \\ (m, q) = 1}} \psi\left(\frac{x}{dt^2 m^2}\right) - \sum_{d, q} \mu(d) \sum_{t, q} \mu(t) \sum_{\substack{m \leq \frac{x}{dt^2 m^2} \\ (m, q) = 1}} \psi\left(\frac{1}{d} \sqrt{\frac{x}{t}}\right) + \\ &\quad + \frac{\varphi(q)}{q} x \sum_{d, q} \frac{\mu(d)}{d^2} \left(\zeta(2) - \frac{d}{x^{\frac{1}{2}}} - \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{d}\right) \frac{d^2}{x^{\frac{3}{2}}} + O(x^{-1} d^3) \right) \\ &\quad + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} \sum_{d, q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{3}{2}}} \left(\zeta\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}} - \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{d}\right) \frac{d^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + O(x^{-\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}}) \right) - \\ &\quad - \frac{\varphi^2(q)}{q^2} x^{\frac{3}{2}} + 2 \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} \sum_{d, q} \mu(d) \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{d}\right) + O(q^e), \\ (52) \quad &\begin{cases} A_1(x, \chi_0) \\ = -S_1(x, q) - S_2(x, q) + \frac{\varphi(q)}{q} x L(2, \chi_0) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right) + O(q^{1+\epsilon}). \end{cases} \end{aligned}$$

Für $\chi = \chi_1$ haben wir nach (51), (37), Lemma 13, (46), (47) und Lemma 14 für $q \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} A_1(x, \chi_1) &= \sum_{h \leq q} \chi_1(h) \sum_{\substack{m \leq x^{\frac{1}{2}} \\ (m, q) = 1}} \left[\frac{x}{qm^2} - \frac{h}{q} + 1 \right] + \\ &\quad + \sum_{h \leq q} \chi_1(h) \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{m \leq x^{\frac{1}{2}} \\ m \equiv h \pmod{q}}} \left[\frac{1}{d} \sqrt{\frac{x}{m}} \right] - \sum_{d|q} \mu(d) \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{d} \right] \sum_{h \leq q} \chi_1(h) \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{q} - \frac{h}{q} + 1 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -S_3(x, q) - S_4(x, q) + \frac{\varphi(q)}{q} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}} \sum_{h \leq q} \chi_1(h) \left(\zeta \left(\frac{1}{2}, \frac{h}{q} \right) + 2 \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - h}{q} \right)^{\frac{1}{2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \psi \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - h}{q} \right) \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - h}{q} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{h}{q} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - h}{q} \right)^{-\frac{1}{2}} + O(x^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}}) \right) + \\
 &\quad + O(q^{1+\epsilon}) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} \sum_{h \leq q} \chi_1(h) \psi \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - h}{q} \right),
 \end{aligned}$$

$$(53) \quad A_1(x, \chi_1) = -S_3(x, q) - S_4(x, q) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} L \left(\frac{1}{2}, \chi_1 \right) + O(q^2), \quad q \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}.$$

Ist $\chi \neq \chi_6$ und $\chi \neq \chi_1$, so erhalten wir aus (51) mit (48) und (49)

$$\begin{aligned}
 A_1(x, \chi) &= \sum_{h \leq q} \chi(h) \sum_{m \leq x^{\frac{1}{2}}} \chi^2(m) \left[\frac{x}{q m^2} - \frac{h}{q} + 1 \right] + \\
 &\quad + \sum_{h \leq q} \chi^2(h) \sum_{m \leq x^{\frac{1}{2}}} \chi(m) \left[\frac{\sqrt{x}}{q \sqrt{m}} - \frac{h}{q} + 1 \right] + O(q^2) \\
 &= -S_5(x, q, \chi) - S_6(x, q, \chi) - \frac{1}{q} \sum_{h \leq q} \chi(h) h \sum_{j \leq q} \chi^2(j) \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{q} - \frac{j}{q} + 1 \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{q} \sum_{h \leq q} \chi^2(h) h \sum_{j \leq q} \chi(j) \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{q} - \frac{j}{q} + 1 \right] + O(q^2),
 \end{aligned}$$

$$(54) \quad A_1(x, \chi) = -S_5(x, q, \chi) - S_6(x, q, \chi) + O(q^2) \quad \text{für} \quad \chi \neq \chi_0, \chi \neq \chi_1.$$

11. Jetzt sollen die Summen $S_\nu(x, q)$, $1 \leq \nu \leq 6$, abgeschätzt werden. Zu diesem Zwecke beweisen wir in Verallgemeinerung von Lemma 8 das folgende

Lemma 17: Es seien x, η, α, ω reelle Zahlen, j und q natürliche Zahlen, $x \geq 1$, $\alpha > 0$, $\eta \geq 1$, $1 \leq j \leq q$, (k, l) ein Exponentenpaar mit $k > 0$ und

$$R(x, \eta, \alpha; q, j; \omega) = \sum_{\substack{n \leq \eta \\ n \equiv j \pmod{q}}} \psi \left(\frac{x}{n^\alpha} + \omega \right),$$

wo ω von n unabhängig ist. Dann gilt

$$R(x, \eta, \alpha; q, j; \omega) = O(1) + O(x^{-\frac{1}{2}} \eta^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{-1}) + \begin{cases} O \left(x^{\frac{k}{k+1}} \eta^{\frac{l-\alpha k}{k+1}} q^{-\frac{l}{k+1}} \right) & \text{für } l > \alpha k, \\ O \left(x^{\frac{k}{k+1}} \log \eta q^{-\frac{\alpha k}{k+1}} \right) & \text{für } l = \alpha k, \\ O \left((x q^{-\alpha})^{\frac{k}{1+(\alpha+1)k-l}} \right) & \text{für } l < \alpha k, \end{cases}$$

wobei die O -Konstanten nur von α abhängen.

Für $\lambda = 1, 2, \dots$ sind

$$(k_\lambda, l_\lambda) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda + 1}{2(2\lambda - 1)}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\lambda - 1)} \right), \quad A = 2^\lambda,$$

Exponentenpaare.

Beweis. Für $1 \leq \eta < 3q$ ist $R(x, \eta, \alpha; q, j; \omega) = O(1)$ und daher die erste Behauptung richtig, so daß wir $\eta \geq 3q$ voraussetzen können. In der Definition eines Exponentenpaares wählen wir $h = \alpha + 1$. Dann hängt $\gamma(\alpha) = \frac{\alpha + r}{c}$ nur von α ab. Für $a > \gamma(\alpha)$ genügt nun die beliebig oft, also sicher r -mal, differenzierbare Funktion $f(n) = -\frac{v x}{q^\alpha \left(n + \frac{j}{q}\right)^\alpha}$, v natürlich, mit $y = \frac{\alpha v x}{q^\alpha}$ der Bedingung (15). Setzen wir $u = 2$ und beachten $\gamma(\alpha) > 1$, so erhalten wir mit Berücksichtigung von (14) für irgendein Exponentenpaar (k, l)

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = O(x^k a^l) = O(v^k x^k a^{l-(\alpha+1)k} q^{-\alpha k}) \quad \text{für } \gamma(\alpha) < a < b < 2a, \quad z > 1.$$

Wegen $u = 2$ hängt dabei die O -Konstante nur von k , d. h. nur von α ab. Ferner sind für $\gamma(\alpha) < a < b < 2a$ und $z \leq 1$ bei $f(n)$ die Voraussetzungen in Lemma 6 mit $\lambda = 3^{-\alpha-2}\alpha(\alpha+1) v x a^{-\alpha-2} q^{-\alpha}$ erfüllt, so daß wir aus Lemma 6 bekommen

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = O\left(v^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{für } \gamma(\alpha) < a < b < 2a, \quad z \leq 1,$$

insgesamt also

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = O(v^k x^k a^{l-(\alpha+1)k} q^{-\alpha k}) + O\left(v^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{für } \gamma(\alpha) < a < b < 2a.$$

Verwenden wir dies in Lemma 7 mit $g(n) = \frac{x}{q^\alpha \left(n + \frac{j}{q}\right)^\alpha} + \omega$, so folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{a \leq n \leq b} \psi\left(\frac{x}{q^\alpha \left(n + \frac{j}{q}\right)^\alpha} + \omega\right) \\ &= O(a \xi^{-1}) + O(1) \sum_{v=1}^{\infty} \text{Min}\left(\frac{\xi}{v^2}, \frac{1}{v}\right) \left(v^k x^k a^{l-(\alpha+1)k} q^{-\alpha k} + v^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{\frac{\alpha}{2}}\right), \end{aligned}$$

denn $v\omega$ ist mit ω von n unabhängig. Daher haben wir mit der Festsetzung

$$\xi = x^{-\frac{k}{k+1}} a^{\frac{1+(\alpha+1)k-l}{k+1}} q^{\frac{\alpha k}{k+1}}$$

wegen $k > 0$

$$(55) \quad \sum_{a \leq n \leq b} \psi\left(\frac{x}{\left(qn + \frac{j}{q}\right)^\alpha} + \omega\right) = O\left(x^{\frac{k}{k+1}} a^{\frac{l-\alpha k}{k+1}} q^{-\frac{\alpha k}{k+1}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}} a^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{\frac{\alpha}{2}}\right) \\ \text{für } \gamma(\alpha) < a < b < 2a.$$

Da jeweils mindestens eines der beiden Fehlerglieder in (55) $\gamma(\alpha)$ majorisiert, gilt (55) ebenfalls für a -Werte mit $1 \leq a \leq \gamma(\alpha)$.

Wir werden nun die Fälle $l \geq \alpha k$ unterscheiden. Zunächst ist

$$(56) \left\{ \begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq \eta \\ n \equiv j \pmod{q}}} \psi\left(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\right) &= \sum_{\substack{0 \leq n \leq \frac{\eta-j}{q}}} \psi\left(\frac{x}{(qn+j)^\alpha} + \omega\right) \\ &= O(1) + \sum_{m \leq K} \sum_{2^{m-1} \leq n < 2^m - 1} \psi\left(\frac{x}{(qn+j)^\alpha} + \omega\right) + \sum_{2^K \geq n \geq \frac{\eta-j}{q}} \psi\left(\frac{x}{(qn+j)^\alpha} + \omega\right), \\ &\quad \text{wo } K = \left\lfloor \frac{\log \frac{\eta-j}{q}}{\log 2} \right\rfloor \quad (\geq 1). \end{aligned} \right.$$

Für $l > \alpha k$ folgt aus (55) und (56)

$$(57) \quad \begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq \eta \\ n \equiv j \pmod{q}}} \psi\left(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\right) &= O(1) + O(1) \sum_{m \leq K} \left(x^{\frac{k}{k+1}} 2^{\frac{l-\alpha k}{k+1}} q^{-\frac{\alpha k}{k+1}} + x^{-\frac{1}{2}} 2^{m\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} q^{\frac{\alpha}{2}} \right) + \\ &\quad + O\left(x^{\frac{k}{k+1}} \eta^{\frac{l-\alpha k}{k+1}} q^{-\frac{l}{k+1}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \eta^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{-1}\right), \\ \sum_{\substack{n \leq \eta \\ n \equiv j \pmod{q}}} \psi\left(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\right) &= O(1) + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \eta^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{-1}\right) + O\left(x^{\frac{k}{k+1}} \eta^{\frac{l-\alpha k}{k+1}} q^{-\frac{l}{k+1}}\right). \end{aligned}$$

Ebenso folgt für $l = \alpha k$ wegen $K = O(\log \eta)$

$$(58) \quad \sum_{\substack{n \leq \eta \\ n \equiv j \pmod{q}}} \psi\left(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\right) = O(1) + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \eta^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{-1}\right) + O\left(x^{\frac{k}{k+1}} \log \eta q^{-\frac{\alpha k}{k+1}}\right).$$

Ist dagegen $l < \alpha k$, so erhalten wir mit der Abkürzung

$$\delta = (xq^{-\alpha})^{\frac{k}{1+(\alpha+1)k-l}}$$

nach (55) und (56) wie bei (21)

$$\sum_{\substack{n \leq \eta \\ n \equiv j \pmod{q}}} \psi\left(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\right) = O(1) + O(\delta) + O\left(x^{\frac{k}{k+1}} \delta^{\frac{l-\alpha k}{k+1}} q^{-\frac{\alpha k}{k+1}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \eta^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{-1}\right),$$

also

$$(59) \quad \sum_{\substack{n \leq \eta \\ n \equiv j \pmod{q}}} \psi\left(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\right) = O(1) + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \eta^{1+\frac{\alpha}{2}} q^{-1}\right) + O\left((xq^{-\alpha})^{\frac{k}{1+(\alpha+1)k-l}}\right).$$

(57) bis (59) ergeben die behaupteten Abschätzungen für $R(x, \eta, \alpha; q, j; \omega)$.

Bei der Herleitung von (22) und (23) haben wir gesehen, daß $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein Exponentenpaar im Sinne unserer Definition ist. Setzen wir aber in Lemma 5 $(k, l) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, so liefert dies den zweiten Teil unserer Behauptung.

Für $\lambda=2$ erhalten wir das Exponentenpaar $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, welches wir schon in I kennenlernten. Mit diesem folgen nach (44) bis (49) bei Beachtung von (36) aus Lemma 17

$$(60) \left\{ \begin{aligned} S_1(x, q) &= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{t|q} \mu(t) R\left(\frac{x}{d^2}, \frac{x^{\frac{1}{3}}}{t}, 2; 1, 1; 0\right) \\ &= O(1) \sum_{d|q} \sum_{t|q} (1 + x^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{3}} t^{-1} + x^{\frac{2}{3}} d^{-\frac{2}{3}} t^{-\frac{4}{3}} \log x) \\ &= O(q^\varepsilon) + O(x^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}) + O(x^{\frac{2}{3}} \log x q^\varepsilon) = O(x^{\frac{2}{3}} \log x \varphi^{\frac{10}{9}}(q) q^{-\frac{1}{3}}), \\ &\quad (q \leq x^{\frac{1}{3}}), \end{aligned} \right.$$

$$(61) \left\{ \begin{aligned} S_2(x, q) &= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{t|q} \mu(t) R\left(\frac{\sqrt{x}}{d}, \frac{x^{\frac{1}{3}}}{t}, \frac{1}{2}; 1, 1; 0\right) \\ &= O(1) \sum_{d|q} \sum_{t|q} (1 + x^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{3}} t^{-1} + x^{\frac{2}{3}} d^{-\frac{2}{3}} t^{-\frac{4}{3}}) \\ &= O(x^{\frac{2}{3}} \log x \varphi^{\frac{10}{9}}(q) q^{-\frac{1}{3}}), \\ &\quad (q \leq x^{\frac{1}{3}}), \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} S_3(x, q) &= \sum_{h \leq q} \chi_1(h) \sum_{d|q} \mu(d) R\left(\frac{x}{q d^2}, \frac{x^{\frac{1}{3}}}{d}, 2; 1, 1; -\frac{h}{q}\right) \\ &= O(1) \sum_{h \leq q} \sum_{d|q} (1 + x^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}} d^{-1} + x^{\frac{2}{3}} q^{-\frac{2}{3}} d^{-\frac{4}{3}} \log x) \\ &= O(q^{1+\varepsilon}) + O(x^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}+\varepsilon}) + O(x^{\frac{2}{3}} \log x q^{\frac{2}{3}+\varepsilon}) = O(x^{\frac{2}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}}), \\ &\quad (q \leq x^{\frac{1}{3}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4(x, q) &= \sum_{h \leq q} \chi_1(h) \sum_{d|q} \mu(d) R\left(\frac{\sqrt{x}}{d}, x^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2}; q, h; 0\right) \\ &= O(1) \sum_{h \leq q} \sum_{d|q} (1 + x^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{3}} q^{-1} + x^{\frac{2}{3}} d^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{4}{3}}) \\ &= O(q^{1+\varepsilon}) + O(x^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}+\varepsilon}) + O(x^{\frac{2}{3}} q^{\frac{2}{3}+\varepsilon}) = O(x^{\frac{2}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}}), \\ &\quad (q \leq x^{\frac{1}{3}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_5(x, q, \chi) &= \sum_{h \leq q} \chi(h) \sum_{j \leq q} \chi^2(j) R\left(\frac{x}{q}, x^{\frac{1}{3}}, 2; q, j; -\frac{h}{q}\right) \\ &= O(1) \sum_{h \leq q} \sum_{j \leq q} (1 + x^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \log x q^{-\frac{2}{3}}) \\ &= O(q^2) + O(x^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}}) + O(x^{\frac{2}{3}} \log x q^{\frac{1}{3}}) = O(x^{\frac{2}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}}), \\ &\quad (q \leq x^{\frac{1}{3}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_6(x, q, \chi) &= \sum_{h \leq q} \chi^2(h) \sum_{j \leq q} \chi(j) R\left(\frac{\sqrt{x}}{q}, x^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2}; q, j; -\frac{h}{q}\right) \\ &= O(1) \sum_{h \leq q} \sum_{j \leq q} (1 + x^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} q^{-\frac{2}{3}}) \\ &= O(x^{\frac{2}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}}), \quad (q \leq x^{\frac{1}{3}}). \end{aligned}$$

Da nach (44) und (45) für jedes positive ε trivialerweise $S_1(x, q) = O(x^{\frac{1}{2}} q^\varepsilon)$ und $S_2(x, q) = O(x^{\frac{1}{2}} q^\varepsilon)$ gelten, bleiben die beiden ersten Abschätzungen auch für $q > x^{\frac{1}{2}}$ richtig, so daß aus (52)

$$(62) \quad A_1(x, \chi_0) = \frac{\varphi(q)}{q} x L(2, \chi_0) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}} \log x q^{\frac{1}{2}}(q) q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

folgt. Weiter ergibt sich für $q \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$ aus (53)

$$(63) \quad A_1(x, \chi_1) = \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_1\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}} \log x \varphi(q) q^{\frac{1}{2}}\right),$$

und wegen der stets gültigen Abschätzung $A_1(x, \chi) = O(x)$ gilt dies auch für $q > \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$. Schließlich folgt aus (54) für $q \leq x^{\frac{1}{2}}$

$$(64) \quad A_1(x, \chi) = O\left(x^{\frac{3}{2}} \log x \varphi(q) q^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{für} \quad \chi^2 \neq \chi_0,$$

was ebenfalls für $q > x^{\frac{1}{2}}$ trivialerweise richtig bleibt.

12. Nun wollen wir $A_2(x, \chi)$ behandeln. Zuvor sei noch bemerkt, daß aus (50)

$$(65) \quad |A_1(\omega, \chi)| \leq \sum_{n=\omega} |a_1(n, \chi)| \leq A_1(\omega, \chi_0)$$

folgt.

Nach Lemma 1 haben wir wieder für jeden Charakter χ modulo q bei $1 \leq a \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$

$$(66) \quad \begin{cases} A_2(x, \chi) \\ = \sum_{m^3 n \leq x} \chi^3(m) a_1(n, \chi) = \sum_{m \leq a} \chi^3(m) A_1\left(\frac{x}{m^3}, \chi\right) + \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{a^3} \\ a < m \leq \sqrt{\frac{x}{n}}}} a_1(n, \chi) \sum_{a < m \leq \sqrt{\frac{x}{n}}} \chi^3(m). \end{cases}$$

Hieraus folgt für einen Charakter χ mit $\chi^2 \neq \chi_0$ und $\chi^3 \neq \chi_0$ mit (64), (65) und (62)

$$\begin{aligned} A_2(x, \chi) &= O(1) \sum_{m \leq a} x^{\frac{3}{2}} m^{-\frac{3}{2}} \log x q^{\frac{1}{2}} + O(q) A_1\left(\frac{x}{a^3}, \chi_0\right) \\ &= O\left(x^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} \log x q^{\frac{1}{2}}\right) + O(x a^{-3} q) + O\left(x^{\frac{3}{2}} a^{-\frac{3}{2}} \log x q^{\frac{1}{2}}(q) q^{\frac{1}{2}}\right), \end{aligned}$$

also mit

$$(67) \quad a = x^{\frac{2}{3}} \log^{-\frac{1}{3}} x q^{-\frac{1}{3}},$$

falls $q \leq x^{\frac{1}{2}}$ ist (dann ist auch die Bedingung $1 \leq a \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$ erfüllt),

$$(68) \quad A_2(x, \chi) = O\left(x^{\frac{2}{3}} \log^{\frac{1}{3}} x q^{\frac{1}{3}}\right) \quad \text{für} \quad \chi^2 \neq \chi_0, \chi^3 \neq \chi_0;$$

anderenfalls ist jedoch (68) trivialerweise richtig. Weiter haben wir aus (66) nach (38), (64), Lemma 13, (39), wenn wir a wie in (67) wählen, und

zunächst $q \leq x$ voraussetzen, denn dann ist die Bedingung $1 \leq a \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{3}}$ erfüllt,

$$\begin{aligned} A_2(x, \chi_2) &= O\left(x^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{2}{3}}\right) + \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{n \leq \frac{x}{a^2}} a_1(n, \chi_2) \left(\left[\frac{\sqrt[3]{x}}{d^{\frac{1}{3}}} \right] - \left[\frac{a}{d} \right] \right) \\ &= O\left(x^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{2}{3}}\right) + \\ &+ O\left(x a^{-3} \varphi(q)\right) - \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} \sum_{n > \frac{x}{a^3}} a_1(n, \chi_2) n^{-\frac{1}{3}} + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{3}, \chi_2\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_2^2\right), \end{aligned}$$

$$(69) \quad A_2(x, \chi_2) = \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{3}, \chi_2\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_2^2\right) + O\left(x^{\frac{2}{3}} \log^{\frac{1}{3}} x \varphi(q) q^{\frac{2}{3}}\right);$$

für $q > x$ ist (69) wieder trivialerweise richtig. Und aus (66) erhalten wir mit (63), (65) und (62), wenn wir wieder a gemäß (67) wählen, für $q \leq x$ (dann ist $1 \leq a \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{3}}$)

$$\begin{aligned} A_2(x, \chi_1) &= \sum_{m \leq a} \chi_1^3(m) \left(\frac{\varphi(q)}{q} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_1\right) + O\left(x^{\frac{2}{3}} m^{-\frac{2}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{2}{3}}\right) \right) + \\ &+ O\left(x a^{-3} \varphi(q)\right) + O\left(x^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} \log x \varphi^{\frac{1}{10}}(q) q^{\frac{2}{3}}\right) \\ &= \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_1\right) L\left(\frac{3}{2}, \chi_1^3\right) + \\ &+ O\left(x^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} \log x \varphi(q) q^{\frac{2}{3}}\right) + O\left(x a^{-3} \varphi(q)\right) + O\left(x^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} \log x \varphi^{\frac{1}{10}}(q) q^{\frac{2}{3}}\right), \\ (70) \quad A_2(x, \chi_1) &= \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_1\right) L\left(\frac{3}{2}, \chi_1^3\right) + O\left(x^{\frac{2}{3}} \log^{\frac{1}{10}} x \varphi(q) q^{\frac{2}{3}}\right). \end{aligned}$$

Wir erkennen nachträglich die Richtigkeit von (70) auch für $q > x$.

Jetzt bleibt noch $A_2(x, \chi_0)$ zu bestimmen. Hierfür beweisen wir das
Lemma 18: Für $\omega \geq q^3$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq \omega} a_1(n, \chi_0) n^{-\frac{1}{3}} &= L\left(\frac{1}{3}, \chi_0\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_0\right) + \frac{3}{2} \frac{\varphi(q)}{q} \omega^{\frac{2}{3}} L(2, \chi_0) + \\ &+ 3 \frac{\varphi(q)}{q} \omega^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right) + O\left(\omega^{-\frac{1}{3}} \log \omega \varphi^{\frac{1}{10}}(q) q^{-\frac{1}{3}}\right). \end{aligned}$$

Beweis. Nach Lemma 1, Lemma 13 und Lemma 2 haben wir für $q \leq \omega^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq \omega} a_1(n, \chi_0) n^{-\frac{1}{3}} &= \sum_{\substack{m^2 n \leq \omega \\ (m, n, q) = 1}} m^{-\frac{2}{3}} n^{-\frac{1}{3}} = \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{2}{3}}} \sum_{\substack{m \leq \frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t} \\ t \nmid m}} m^{-\frac{2}{3}} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{1}{3}}} \sum_{n \leq \frac{\omega}{d^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}}} n^{-\frac{1}{3}} + \\ &+ \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{2}{3}}} \sum_{\substack{n \leq \frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t} \\ t \nmid n}} n^{-\frac{1}{3}} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{1}{3}}} \sum_{\substack{\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{d} < m \leq \frac{\sqrt{\omega}}{d \sqrt{t} \sqrt{n}}} m^{-\frac{2}{3}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{2}{3}}} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{1}{3}}} \sum_{\substack{m \leq \frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}}} m^{-\frac{2}{3}} \times \\
&\quad \times \left(\zeta\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\omega}{d t^2 m^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \psi\left(\frac{\omega}{d t^2 m^2}\right) \left(\frac{\omega}{d t^2 m^2}\right)^{-\frac{1}{3}} + O\left(\left(\frac{\omega}{d t^2 m^2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right) \right) + \\
&\quad + \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{1}{3}}} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{2}{3}}} \sum_{\substack{n \leq \frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}}} n^{-\frac{1}{3}} \times \\
&\quad \times \left(3 \left(\frac{\lfloor \frac{\omega}{d t n} \rfloor}{d t n}\right)^{\frac{1}{3}} - 3 \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{d}\right)^{\frac{1}{3}} - \psi\left(\frac{\lfloor \frac{\omega}{d t n} \rfloor}{d t n}\right) \left(\frac{\lfloor \frac{\omega}{d t n} \rfloor}{d t n}\right)^{-\frac{2}{3}} + \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{d}\right) \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{d}\right)^{-\frac{2}{3}} + \right. \\
&\quad \left. + O\left(\left(\frac{\lfloor \frac{\omega}{d t n} \rfloor}{d t n}\right)^{-\frac{5}{3}}\right) + O\left(\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{d}\right)^{-\frac{5}{3}}\right) \right) \\
&= L\left(\frac{1}{3}, \chi_0\right) \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{2}{3}}} \left(\zeta\left(\frac{2}{3}\right) + 3 \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{\frac{1}{3}} - \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right) \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{-\frac{2}{3}} + O\left(\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{-\frac{5}{3}}\right) \right) + \\
&\quad + O\left(\omega^{-\frac{1}{3}} q^{1+\epsilon}\right) + \frac{3}{2} \omega^{\frac{2}{3}} \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{t,q} \frac{\mu(t)}{t^2} \left(\zeta(2) - \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{-1} - \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right) \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{-2} + \right. \\
&\quad \left. + O\left(\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{-3}\right) \right) - \omega^{-\frac{1}{3}} \sum_{t,q} \mu(t) \sum_{d,q} \mu(d) \sum_{\substack{m \leq \frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}}} \psi\left(\frac{\omega}{d t^2 m^2}\right) + \\
&\quad + 3 \omega^{\frac{1}{3}} \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{1}{3}}} \left(\zeta\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{\frac{1}{2}} - \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right) \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} + O\left(\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}\right) \right) - \\
&\quad - 3 \omega^{\frac{1}{3}} \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{t|q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{1}{3}}} \left(\zeta\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{\frac{2}{3}} - \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right) \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{-\frac{1}{3}} + O\left(\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{-\frac{4}{3}}\right) \right) - \\
&\quad - \omega^{-\frac{1}{3}} \sum_{t|q} \mu(t) \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq \frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}}} \psi\left(\frac{\lfloor \frac{\omega}{d t n} \rfloor}{d t n}\right) + \omega^{-\frac{2}{3}} \sum_{t,q} \frac{\mu(t)}{t^{\frac{1}{3}}} \sum_{d|q} \mu(d) \times \\
&\quad \times \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{d}\right) \left(\zeta\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{\frac{2}{3}} - \psi\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right) \left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{-\frac{1}{3}} + O\left(\left(\frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{t}\right)^{-\frac{4}{3}}\right) \right),
\end{aligned}$$

also mit (44) und (45)

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq \omega} a_1(n, \chi_0) n^{-\frac{1}{3}} &= L\left(\frac{1}{3}, \chi_0\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_0\right) + O\left(\omega^{-\frac{1}{3}} q^{1+\epsilon}\right) - \\
&\quad - \omega^{-\frac{1}{3}} (S_1(\omega, q) + S_2(\omega, q)) + \frac{3}{2} \frac{\varphi(q)}{q} \omega^{\frac{2}{3}} L(2, \chi_0) + 3 \frac{\varphi(q)}{q} \omega^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right),
\end{aligned}$$

so daß jetzt mit (60) und (61) unsere Behauptung folgt.

Nun ist hier nach (66) und Lemma 13

$$A_2(x, \chi_0) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{m \leq \frac{x}{d}}} A_1\left(\frac{x}{d^3 m^3}, \chi_0\right) + \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{a^2}}} a_1(n, \chi_0) \left(\left[\frac{\sqrt[3]{x}}{d \sqrt[3]{n}} \right] - \left[\frac{a}{d} \right] \right),$$

und daher erhalten wir mit (62), Lemma 2 und Lemma 18 für $x a^{-3} = \omega \geq q^3$ (dann wird auch $1 \leq a \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{3}}$ sein)

$$\begin{aligned}
 A_2(x, \chi_0) &= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{m \leq a \\ d \leq a}} \left(\frac{\varphi(q)}{q} \cdot \frac{x}{d^3 m^3} L(2, \chi_0) + \frac{\varphi(q)}{q} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{3}{2}} m^{\frac{3}{2}}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right) + \right. \\
 &\quad \left. + O\left(x^{\frac{2}{3}} d^{-\frac{2}{3}} m^{-\frac{2}{3}} \log x \varphi^{\frac{10}{9}}(q) q^{-\frac{1}{3}}\right) \right) \\
 &\quad + O(q^\epsilon) \left(x a^{-3} + x^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} \log x \varphi^{\frac{10}{9}}(q) q^{-\frac{1}{3}} \right) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{a^3}}} a_1(n, \chi_0) n^{-\frac{1}{2}} - \\
 &\quad - \frac{\varphi(q)}{q} a \left(\frac{\varphi(q)}{q} x a^{-3} L(2, \chi_0) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right) + \right. \\
 &\quad \left. + O\left(x^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} \log x \varphi^{\frac{10}{9}}(q) q^{-\frac{1}{3}}\right) \right) \\
 &= \frac{\varphi(q)}{q} x L(2, \chi_0) \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^3} \left(\zeta(3) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{d} \right)^{-2} + O(a^{-3} d^3) \right) + \\
 &\quad + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right) \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^{\frac{3}{2}}} \left(\zeta\left(\frac{3}{2}\right) - 2 \left(\frac{a}{d} \right)^{-\frac{1}{2}} + O(a^{-\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{2}}) \right) + \\
 &\quad + O\left(x^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} \log x \varphi^{\frac{10}{9}}(q) q^{-\frac{1}{3} + \epsilon}\right) \\
 &\quad + O(x a^{-3} q^\epsilon) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} L\left(\frac{1}{3}, \chi_0\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_0\right) + \frac{3}{2} \frac{\varphi^2(q)}{q^2} x a^{-2} L(2, \chi_0) + \\
 &\quad + 3 \frac{\varphi^2(q)}{q^2} x^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right) - \frac{\varphi^2(q)}{q^2} x a^{-2} L(2, \chi_0) - \\
 &\quad - \frac{\varphi^2(q)}{q^2} x^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right) \\
 &= \frac{\varphi(q)}{q} x L(2, \chi_0) L(3, \chi_0) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right) L\left(\frac{3}{2}, \chi_0\right) + \\
 &\quad + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} L\left(\frac{1}{3}, \chi_0\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_0\right) + \\
 &\quad + O\left(x^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} \log x \varphi^{\frac{10}{9}}(q) q^{-\frac{1}{3} + \epsilon}\right) + O(x a^{-3} q^\epsilon).
 \end{aligned}$$

Wenn wir hier

$$a = x^{\frac{1}{3}} \log^{-\frac{1}{10}} x \varphi^{-\frac{1}{3}}(q) q^{-\frac{1}{3}}$$

wählen, haben wir endlich mit $\epsilon = \frac{3}{10}$ für $x a^{-3} \geq q^3$, aber trivialerweise auch für $q^3 > x a^{-3}$,

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} A_2(x, \chi_0) &= \frac{\varphi(q)}{q} x L(2, \chi_0) L(3, \chi_0) + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_0\right) L\left(\frac{3}{2}, \chi_0\right) + \\ &\quad + \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{2}} L\left(\frac{1}{3}, \chi_0\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_0\right) + O(x^{\frac{2}{3}} \log^{\frac{10}{9}} x \varphi(q) q^{\frac{3}{10}}). \end{aligned} \right.$$

13. Nun zur Bestimmung von $A_0(x, \chi)$. Nach (40), (41) und (35) ist für jeden Charakter χ

$$A_0(x, \chi) = \sum_{m|n \leq x} a_2(m, \chi) a_3(n, \chi) = \sum_{n \leq x} a_3(n, \chi) A_2\left(\frac{x}{n}, \chi\right).$$

Hieraus folgt wegen Lemma 16 für $\chi^2 \neq \chi_0$, $\chi^3 \neq \chi_0$ mit (50) und (68)

$$(72) \quad \begin{cases} A_0(x, \chi) = O(1) x^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} x q^{\frac{1}{3}} \sum_{n \leq x} a_3(n, \chi_0) n^{-\frac{1}{3}} \\ = O(x^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} x q^{\frac{1}{3}}), \quad \chi^2 \neq \chi_0, \chi^3 \neq \chi_0. \end{cases}$$

mit (69), (50), (41) und (43)

$$A_0(x, \chi_2) = \frac{\varphi(q)}{q} x^{\frac{1}{3}} L\left(\frac{1}{3}, \chi_2\right) L\left(\frac{2}{3}, \chi_2^2\right) \sum_{n \leq x} a_3(n, \chi_2) n^{-\frac{1}{3}} + \\ + O(1) x^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}} \sum_{n \leq x} a_3(n, \chi_0) n^{-\frac{1}{3}},$$

$$(73) \quad A_0(x, \chi_2) = \frac{\varphi(q)}{q} c_3(\chi_2) x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}})$$

und ebenso mit (70)

$$(74) \quad A_0(x, \chi_1) = \frac{\varphi(q)}{q} c_2(\chi_1) x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}})$$

und mit (71)

$$(75) \quad \begin{cases} A_0(x, \chi_0) = \frac{\varphi(q)}{q} c_1(\chi_0) x + \frac{\varphi(q)}{q} c_2(\chi_0) x^{\frac{1}{3}} + \\ + \frac{\varphi(q)}{q} c_3(\chi_0) x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} x \varphi(q) q^{\frac{1}{3}}). \end{cases}$$

Jetzt sind alle Vorbereitungen getroffen, und wir beweisen den

Satz 5: Es seien l und q zwei natürliche Zahlen, $1 \leq l \leq q$, $q \geq 2$, $(l, q) = 1$, $a_0(n)$ die Anzahl der wesentlich verschiedenen ABELSchen Gruppen der Ordnung n , $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi$ Charaktere modulo q , χ_0 der Hauptcharakter, χ_1 , falls er existiert, derjenige Charakter mit $\chi_1^2 = \chi_0$, $\chi_1 \neq \chi_0$, mit χ_2 seien, falls sie existieren, diejenigen Charaktere modulo q bezeichnet, für die $\chi_2^3 = \chi_0$, $\chi_2 \neq \chi_0$ ist,

$$c_\mu(\chi) = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{\infty} L\left(\frac{\nu}{\mu}, \chi^\nu\right), \quad \mu = 1, 2, 3,$$

$$d(\chi_1) = \begin{cases} \bar{\chi}_1(l) c_2(\chi_1) & \text{für } q \geq 3, \\ 0 & \text{für } q = 2, \end{cases} \quad d(\chi_2) = \begin{cases} \sum_{\chi_2} \bar{\chi}_2(l) c_3(\chi_2) & \text{für } \varphi(q) \equiv 0 \pmod{3}, \\ 0 & \text{für } \varphi(q) \not\equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

Dann gilt für $x \rightarrow \infty$ gleichmäßig in q und l

$$(76) \quad \begin{cases} A_0(x; q, l) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{q}}} a_0(n) \\ = c_1(\chi_0) \frac{x}{q} + c_2(\chi_0) \frac{x^{\frac{1}{3}}}{q} + c_3(\chi_0) \frac{x^{\frac{1}{3}}}{q} + d(\chi_1) \frac{x^{\frac{1}{3}}}{q} + d(\chi_2) \frac{x^{\frac{1}{3}}}{q} + O(x^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} x q^{\frac{1}{3}}). \end{cases}$$

Beweis. Wir beachten

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) A_0(x, \chi) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{h \leq q} \left(\sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \chi(h) \right) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv h \pmod{q}}} a_0(n) = A_0(x; q, l)$$

und erhalten dann aus (72) bis (75), wenn wir bemerken, daß der Hauptcharakter χ_0 genau einmal, der Charakter χ_1 für $\varphi(q) \equiv 0 \pmod{2}$, d. h. für $q \geq 3$, genau einmal, für $q = 2$ aber nicht auftritt, und die beiden Charaktere χ_2 genau im Falle $\varphi(q) \equiv 0 \pmod{3}$ in obiger Summe über alle Charaktere modulo q vorkommen,

$$A_0(x; q, l) = c_1(\chi_0) \frac{x}{q} + c_2(\chi_0) \frac{x^{\frac{1}{2}}}{q} + c_3(\chi_0) \frac{x^{\frac{1}{3}}}{q} + \\ + d(\chi_1) \frac{x^{\frac{1}{2}}}{q} + d(\chi_2) \frac{x^{\frac{1}{3}}}{q} + O(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{3}{10}} x q^{\frac{3}{5}}),$$

so daß unser Satz bewiesen ist.

Im Fehlerglied von (76) hätten wir den Exponenten $\frac{8}{5}$ von q noch kleiner machen können, wenn wir in (62) bis (64) und (68) bis (71) statt eines mehrere Fehlerglieder aufgeschrieben und diese dann bis zum Schluß mitgeschleppt hätten. Doch wären dann die Rechnungen noch umfangreicher geworden.

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 20. Dezember 1952.)

Spektraltheoriefreie Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum.

Von

HEINZ GÜNTHER TILLMANN.

Einleitung.

Einen Ausgangspunkt für die Entwicklung der Theorie des HILBERTSchen Raumes bildeten die linearen Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = y_i$$

oder

$$(1') \quad A \mathfrak{x} = \mathfrak{y}.$$

D. HILBERT¹⁾ löste das Gleichungsproblem für den Fall einer vollstetigen Matrix, indem er zeigte, daß jedes solche Gleichungssystem durch unitäre Umformungen auf eine Diagonalform gebracht werden kann.

Bei beschränkten Operatoren ist die Diagonalform durch unitäre Umformungen im allgemeinen nicht zu erreichen. Die nächsteinfachste Form der Matrix ist diejenige, bei der außer der Hauptdiagonalen nur die erste untere Schrägzeile besetzt ist. W. SCHMEIDLER²⁾ hat gezeigt, daß diese Form der Matrix (abgesehen von Nullzeilen und Nullspalten) bei beschränkten Operatoren stets durch unitäre Umformungen erhalten werden kann. Da bei der SCHMEIDLERSchen Konstruktion die Elemente in der Hauptdiagonalen sämtlich ungleich Null werden, lassen sich die zugehörigen linearen Gleichungssysteme in einfacher Weise rekursiv auflösen.

Der Versuch SCHMEIDLERS³⁾, diese Ergebnisse auf eine allgemeinere Klasse von Operatoren („unbeschränkt iterierbare Operatoren“) zu übertragen, führte zu keiner echten Verallgemeinerung, wie im § 1 dieser Arbeit gezeigt wird. Die SCHMEIDLERSche Normalform wird dann jedoch unter Benutzung von Resultaten, die wir J. DIXMIER⁴⁾ verdanken, im folgenden für beliebige ab-

¹⁾ HILBERT, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. 4. Mitt. Göttinger Nachr. **1906**, 157—227.

Das von HILBERT für den symmetrischen Fall angegebene Verfahren läßt sich bei Benutzung zweier v. O. S. unmittelbar auf den nichtsymmetrischen Fall übertragen.

²⁾ SCHMEIDLER, W.: Zum Äquivalenzproblem beschränkter Bilinearformen. J. reine angew. Math. **163**, 135—140 (1930).

³⁾ SCHMEIDLER, W.: Über unbeschränkt iterierbare Operatoren. J. reine angew. Math. **187**, 109—114 (1950).

⁴⁾ DIXMIER, J.: Position relative de deux variétés lineaires fermées dans un espace de Hilbert. Rev. sci. **86**, 387—399 (1948).

geschlossene Operatoren gewonnen. (Eine Übertragung auf noch allgemeinere Operatoren ist nicht mehr möglich, da jede zeilenfinite Matrix einen abgeschlossenen Operator definiert, wenn nicht der Definitionsbereich durch zusätzliche Bedingungen eingeschränkt wird.) Die so gefundenen Normalformen sind nicht in jedem Falle endgültig, sondern können unter Umständen noch auf Diagonalform gebracht werden. Es ist jedoch nicht in einfacher Weise zu entscheiden, ob zwei Normalformen ineinander übergeführt werden können oder nicht.

In dieser Hinsicht gelangte G. KÖTHE⁵⁾ zu sehr übersichtlichen und abschließenden Ergebnissen. Mittels topologischer (= intakter) linearer Transformationen Q' , Q'' führt er die Gleichung $A\xi = \eta$ zurück auf die äquivalente Gleichung $Q' A Q'' \xi' = \eta'$, zu der dann im wesentlichen eine Diagonalmatrix gehört. Die Beweise KÖTHES machen wesentlich von der Spektraltheorie Gebrauch. Wir leiten nun in § 3 und § 4 die KÖTHESchen Resultate völlig spektraltheoriefrei her, wobei an analytischen Begriffen nur noch soviel benutzt wird, wie sich aus der Forderung der Vollständigkeit des Raumes unmittelbar ergibt.

Die Klasse der abgeschlossenen Operatoren ist aber für viele Fragen noch zu eng, da man sowohl durch die Addition wie auch durch die Multiplikation über diesen Bereich herausgeführt wird. Man gelangt durch die Ausführung dieser Operationen zu den JULIASchen Operatoren⁶⁾. Um auch für diese allgemeinere Klasse von Operatoren eine sinnvolle Gleichungstheorie entwickeln zu können, erweist es sich als notwendig, auch allgemeinere als topologische lineare Transformationen zur Umformung zuzulassen. Andernfalls wäre es nämlich unmöglich, zeilenfinite Normalformen zu erhalten. Es gelingt dann aber, auch für beliebige JULIASche Operatoren A die Gleichung $A\xi = \eta$ auf ein Gleichungssystem mit einer Diagonalmatrix zurückzuführen durch Transformationen

$$\eta' = U\eta, \quad \xi = S\xi',$$

wobei U unitär, S eineindeutig und stetig (= beschränkt) ist und der Wertbereich von S mit dem Definitionsbereich von A übereinstimmt.

Im folgenden ist $\mathfrak{H}$ ein (nicht notwendig separabler) HILBERTscher Raum mit dem inneren Produkt (ξ, η) . $\{\mathfrak{M}\}$ ist die kleinste Linearmannigfaltigkeit, die $\mathfrak{M}$ enthält und $\overline{\mathfrak{M}}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{D}_A$ und $\mathfrak{R}_A$ sind Definitions- bzw. Wertbereich eines linearen Operators A und $\mathfrak{N}_A$ ist die Gesamtheit aller Vektoren für die $A\xi = 0$ ist. A^* ist die Adjungierte der linearen Transformation A ⁷⁾.

⁵⁾ KÖTHE, G.: Gleichungstheorie im HILBERTschen Raum. Math. Z. **41**, 153—162 (1936).

⁶⁾ DIXMIER, J.: Étude sur les variétés et les operateurs de Julia, avec quelques applications. Bull. Soc. Math. France **77**, 11—101 (1949).

⁷⁾ NAGY, B. V. Sz.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des HILBERTschen Raumes. Ergebn. Math. **5**, H. 5, 28 (1941).

§ 1. Unbeschränkt iterierbare Operatoren.

Für beschränkte Operatoren hat W. SCHMEIDLER⁸⁾ einfache Normaldarstellungen durch zweistreifige Matrizen angegeben, die eine rekursive Lösung der zugehörigen Gleichungssysteme gestatten. Er bewies mit rein algebraischen Methoden:

(1, I) Zu jedem beschränkten Operator A gibt es zwei v. O. S. $\{e_i^0, e_k\}$ und $\{\bar{e}_j^0, \bar{e}_k\}$ in $\mathfrak{H}$, so daß der Operator A bestimmt ist durch die Beziehungen

$$A e_i^0 = 0,$$

$$A e_k = a_k \bar{e}_k + b_k \bar{e}_{k+1}$$

mit $a_k > 0, b_k \geq 0$.

i, j, k durchlaufen Mengen von Ordnungszahlen $i < i_0, j < j_0, k < k_0$, wobei für die Ordnungszahlen i_0, j_0, k_0 gilt $|i_0 + k_0| = |j_0 + k_0| = \text{Dim}(\mathfrak{H})$.

Für den adjungierten Operator A^* gilt dann

$$A^* \bar{e}_j^0 = 0$$

$$A^* \bar{e}_k = b_{k-1} e_{k-1} + a_k e_k.$$

(Das Glied $b_{k-1} e_{k-1}$ entfällt, falls k Null oder eine Limeszahl ist.)

Für selbstadjungierte, beschränkte Operatoren kommt SCHMEIDLER mit einem einzigen v. O. S. $\{e_k\}$ auf die Normalform

$$(A e_k, e_i) = \begin{vmatrix} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} & \begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & 0 & 0 \dots \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 \dots \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0 \dots \\ \vdots & 0 & b_3 & a_4 & b_4 & 0 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} i, k < k_0 \\ |k_0| = \text{Dim}(\mathfrak{H}). \end{array}$$

Ist eines der b_i Null, so wird eine endliche Teilmatrix abgespalten, die noch auf Diagonalform gebracht werden kann. Dann lassen sich aber aus dem zum Eigenwertproblem $A x = \lambda x$ gehörigen linearen Gleichungssystem

$$b_i x_{i+1} + (a_i - \lambda) x_i + b_{i-1} x_{i-1} = 0$$

die Koordinaten x_i rekursiv bestimmen. λ ist Eigenwert, wenn für eine Limeszahl i_0 und $x_{i_0} \neq 0$ $\sum_{i_0 \leq i < i_0 + \omega} |x_i|^2$ konvergiert. $x = \sum_{i_0} x_i e_i$ ist dann zugehöriger Eigenvektor von A .

SCHMEIDLER⁹⁾ führte nun den Begriff des „unbeschränkt iterierbaren Operators“ ein und bewies die obigen Ergebnisse auch für diese Klasse von

⁸⁾ SCHMEIDLER, W.: a. a. O. ²⁾.

⁹⁾ SCHMEIDLER, W.: a. a. O. ³⁾.

Operatoren. Es wird jedoch im folgenden gezeigt, daß alle unbeschränkt iterierbaren Operatoren auch beschränkt sind.

Definition 1⁹⁾. Ein linearer Operator A mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A$ heißt unbeschränkt iterierbar, wenn A einen adjungierten Operator A^* besitzt, so daß gilt

1. $A(\mathfrak{D}_A) \subseteq \mathfrak{D}_{A^*}; \quad A^*(\mathfrak{D}_{A^*}) \subseteq \mathfrak{D}_A,$
2. A und A^* sind dicht definiert.

Es gilt nun aber der

Satz 1: Sind für A und die Adjungierte A^* die Iterierbarkeitsbedingungen 1. und 2. von Definition 1 erfüllt, so sind A und A^* beschränkt.

Beweis. Sei $B = A^{**}A^* + 1$. Dann gilt

$$(Bx, x) = (A^*x, A^*x) + (x, x) \geq (x, x),$$

also auch

$$\frac{|Bx|}{|x|} \geq \frac{(Bx, x)}{|x|^2} \geq 1.$$

B ist also eineindeutig und es gilt $\|B^{-1}\| \leq 1$. Da B abgeschlossen und hermitesch ist, muß B^{-1} abgeschlossen und überall definiert sein. Sei nun η beliebig in $\mathfrak{H}$, $x = B^{-1}\eta$, also $\eta = A^{**}A^*x + x$. Aus den Iterierbarkeitsbedingungen folgt nun $\eta \in \mathfrak{D}_{A^*}$, da A^{**} Fortsetzung von A ist. A^* ist also abgeschlossen und überall sinnvoll und darum nach einem Satz von HELLINGER und TOEPLITZ¹⁰⁾ beschränkt. Aus $|Ax|^2 = (A^*Ax, x) \leq \|A^*\| \cdot |Ax| \cdot |x|$ folgt dann auch die Beschränktheit von A .

Weiter gilt noch

Satz 2: Ist A abgeschlossen, A' eine Einschränkung der Adjungierten A^* und gilt die Iterierbarkeitsbedingung $A(\mathfrak{D}_A) \subseteq \mathfrak{D}_{A'}$, $A'(\mathfrak{D}_{A'}) \subseteq \mathfrak{D}_A$, so ist A beschränkt.

Beweis. Analog wie bei Satz 1 ergibt sich, daß $(A^*A + 1)^{-1}$ überall sinnvoll, also $\mathfrak{H} = (A^*A + 1)(\mathfrak{D}_{A^*A}) \subseteq \mathfrak{D}_A$ ist. A ist also auch überall sinnvoll und darum beschränkt.

Es soll nun gezeigt werden, daß die SCHMEIDLERsche Konstruktion nicht immer zum Ziele führt, wenn nur für eine Einschränkung A' der Adjungierten A^* die Iterierbarkeitsbedingungen $A(\mathfrak{D}_A) \subseteq \mathfrak{D}_{A'}$, $A'(\mathfrak{D}_{A'}) \subseteq \mathfrak{D}_A$ erfüllt sind.

Beispiel. Sei $\mathfrak{H}$ ein separabler HILBERTscher Raum und $e_0, e_1, e_2, \dots, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots$ zwei v.O.S. in $\mathfrak{H}$. Die Vektoren

$$x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^0 e_k = \sqrt{\frac{2}{3}} e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{2^{k+1}-2}}{2^{k+1}} e_k,$$

$$y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} y_k^0 \bar{e}_k = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{e}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{-k} \bar{e}_k$$

¹⁰⁾ HELLINGER, E. u. O. TOEPLITZ: Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Math. Ann. 69, 289—330 (1910).

sind beide vom Betrage 1. In den Linear Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{D} = \{e_1, e_2, \dots, e_0\}$ bzw. $\mathfrak{D}' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \eta_0\}$ definieren wir nun Operatoren A bzw. A' durch die Festsetzungen

$$A e_k = a_k \bar{e}_k + b_k \bar{e}_{k+1}; \quad a_k = b_k = \sqrt{2^{k+1} - 2}, \quad k > 0,$$

$$A e_0 = \eta_0,$$

$$A' \bar{e}_k = b_{k-1} e_{k-1} + a_k e_k,$$

$$A' \eta_0 = e_0.$$

A und A' sind zueinander adjungiert, denn es ist $(A x, y) = (x, A' y)$ für alle $x \in \mathfrak{D}$ und $y \in \mathfrak{D}'$. Weiterhin sind die Iterierbarkeitsbedingungen $A(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}'$ und $A'(\mathfrak{D}') \subseteq \mathfrak{D}$ erfüllt. Beginnt man nun die SCHMEIDLERsche Konstruktion mit

$$u_1 = \bar{e}_1,$$

so erhält man offenbar

$$v_1 = \frac{A' u_1}{|A' u_1|} = e_1,$$

$$u_2 = \frac{A v_1 - (A v_1, u_1) u_1}{|A v_1 - (A v_1, u_1) u_1|} = \bar{e}_2$$

und so weiter fort

$$u_k = \bar{e}_k, \quad v_k = e_k.$$

Die so gewonnenen O.S. $\{e_k\}_{k>0}$ und $\{\bar{e}_k\}_{k>0}$ lassen sich aber innerhalb der Definitionsbereiche $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{D}'$ sicherlich nicht mehr vervollständigen.

Ein ähnliches und noch einfacheres Beispiel läßt sich für den selbstadjungierten Fall angeben.

§ 2. Finite Darstellung abgeschlossener Operatoren.

Das SCHMEIDLERsche Verfahren zur Konstruktion einer einfachen finiten Darstellung läßt sich auf alle abgeschlossenen Operatoren übertragen, indem man die Vektoren, die bei SCHMEIDLER noch weitgehend willkürlich sind, in einer genauer festgelegten Weise auswählt.

Für die folgenden Überlegungen ist der Begriff der „direkten Summe“ von Operatoren wesentlich, die in Analogie zur direkten Summe von Matrizen¹¹⁾ gebildet wird:

Definition 2. Sei A_i eine Menge von Operatoren, für die $\mathfrak{D}_{A_i} \perp \mathfrak{D}_{A_j}$ und $\mathfrak{B}_{A_i} \perp \mathfrak{B}_{A_j}$ falls $i \neq j$. Dann ist die direkte Summe $A = \sum_i \oplus A_i$ definiert für alle Vektoren $x = \sum x_i$ mit $x_i \in \mathfrak{D}_{A_i}$, für die $\sum A_i x_i$ konvergiert, durch $A \sum x_i = \sum A_i x_i$.

Man erhält offenbar eine Matrixdarstellung einer direkten Summe von Operatoren, indem man die direkte Summe der Matrizen bildet, die die einzelnen Operatoren darstellen. Unter Benutzung von Ergebnissen von J. DIXMIER läßt sich zeigen, daß jeder abgeschlossene Operator in eine direkte Summe

¹¹⁾ MACDUFFEE, C. C.: The Theorie of Matrices. Ergebn. Math. 2, H. 5 (1933).

beschränkter Operatoren zerlegt werden kann. Die für uns entscheidenden Theoreme DIXMIERs sind die folgenden¹²⁾:

(2, I) Jeder abgeschlossene Operator A ist zerlegbar in ein Produkt $A = JB$, wobei B selbstadjungiert und nichtnegativ, J isometrisch ist mit

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}_A = \overline{\mathfrak{B}}_A^*, \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_J = \overline{\mathfrak{B}}_A.$$

Diese Zerlegung ist eindeutig.

(2, II) Zu jedem selbstadjungierten Operator A gibt es zwei orthogonal-komplementäre Teilräume $\mathfrak{H}^+$, $\mathfrak{H}^-$ derart, daß A durch $\mathfrak{H}^+$ reduziert wird und gilt:

$$(Ax, x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathfrak{H}^+; \quad (Ax, x) \leq 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathfrak{H}^-.$$

$P_{\mathfrak{H}^+}$ ist vertauschbar mit jedem mit A vertauschbaren Projektionsoperator. $\mathfrak{H}^+$ und $\mathfrak{H}^-$ sind eindeutig bestimmt.

Diese beiden Theoreme sind zwar nicht völlig neu, doch konnte man sie bisher nur unter Benutzung der vollen Spektraltheorie herleiten. DIXMIER gelingt es unter wesentlicher Benutzung des Begriffs des „Bildes“ („Graphen“) eines Operators, den er in geeigneter Weise verallgemeinert, durch Überlegungen, die von jeder Analysis frei sind, diese beiden Sätze zurückzuführen auf den folgenden Satz:

(2, III) Jeder beschränkte, selbstadjungierte, positive Operator A besitzt genau eine selbstadjungierte, positive Quadratwurzel B . B ist vertauschbar mit jedem mit A vertauschbaren selbstadjungierten Operator.

Bei dem von F. J. WECKEN¹³⁾ gegebenen Beweis dieses Satzes wird außer algebraischen Begriffen nur die Konvergenz von Folgen von Vektoren des HILBERT-Raumes benutzt, wie sie sich aus der Dreiecksungleichung und der Vollständigkeit des Raumes unmittelbar ergibt. Dies ist also auch die einzige nicht rein algebraische Grundlage der Ergebnisse DIXMIERs.

Aus (2, II) erhalten wir nun den

Satz 3: Jeder selbstadjungierte Operator A ist direkte Summe eines Nulloperators und höchstens abzählbar unendlich vieler intakter selbstadjungierter Operatoren A_n^+ , A_n^- mit

$$2^n < A_n^- \leq 2^{n+1}, \quad 2^n < -A_n^- \leq 2^{n+1}.$$

Diese Zerlegung ist eindeutig.

Beweis. Nach (2, II) erhalten wir eine Zerlegung $A = A^0 \oplus A^+ \oplus A^-$. Es genügt nun offenbar, für den positiven Teil A^+ die Zerlegung anzugeben, da sie für den negativen Teil A^- in ganz analoger Weise erhalten werden kann.

Da mit A^+ auch $A^+ - \lambda$ selbstadjungiert ist, gibt es zwei eindeutig bestimmte orthogonal-komplementäre Teilräume $\mathfrak{H}_\lambda^+$, $\mathfrak{H}_\lambda^-$, so daß $A^+ > \lambda$ in $\mathfrak{H}_\lambda^+$, $A^+ \leq \lambda$ in $\mathfrak{H}_\lambda^-$ ist, wobei die Projektionen $P_{\mathfrak{H}_\lambda^\pm}$ mit A und untereinander ver-

¹²⁾ a. a. O. 4), Theorem 7 und Theorem 8.

¹³⁾ WECKEN, F. J.: Zur Theorie linearer Operatoren. Math. Ann. 110, 722—725 (1935), insbesondere die Anmerkung bei der Korrektur.

tauschbar sind. Es sei nun $\lambda_n = 2^n$ ($-\infty < n < +\infty$) und

$$\mathfrak{H}_{(n)}^+ =_{Df} \mathfrak{H}_{2^n}^+ \cap \mathfrak{H}_{2^{n+1}}^- = \mathfrak{H}_{2^n}^+ \ominus \mathfrak{H}_{2^{n+1}}^+.$$

Ist A_n^+ die Einschränkung von A auf $\mathfrak{H}_{(n)}^+$ so gilt:

1. A wird durch $\mathfrak{H}_{(n)}^+$ reduziert,
2. $2^n < A_n^+ \leq 2^{n+1}$.

Es ergibt sich nun auch leicht, daß A^+ direkte Summe der A_n^+ ist, denn es gilt mit $P_n = P_{\mathfrak{H}_{(n)}^+}$

$$A^+ x = \sum P_n A^+ x = \sum A^+ P_n x = \sum A_n^+ P_n x = (\sum \oplus A_n^+) x$$

für alle $x \in \mathfrak{D}_{A^+}$, also $A^+ \leq \sum \oplus A_n^+$. Die Umkehrung ist wegen der Abgeschlossenheit von A^+ trivial. Da die Eindeutigkeit der Zerlegung sich unmittelbar aus der Eindeutigkeitsaussage von (2, II) ergibt, ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Für abgeschlossene Operatoren läßt sich unter Benutzung von (2, I) eine ganz entsprechende Zerlegung gewinnen.

Satz 4: *Jeder abgeschlossene Operator B ist direkte Summe eines Nulloperators und höchstens abzählbar vieler beschränkter Operatoren B_n , die den Bedingungen $2^n < \frac{|B_n x|}{|x|} \leq 2^{n+1}$ genügen. Die Zerlegung ist hierdurch eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $B = JA$ (J isometrisch, A selbstadjungiert und ≥ 0) und sei $B_n = JA_n^+$, wo A_n^+ die Bedeutung wie in Satz 3 hat. Offenbar ist dann B direkte Summe der B_n . Da für A_n^+ aus Satz 3 auch folgt $2^n < \frac{|A_n^+ x|}{|x|} \leq 2^{n+1}$, gilt die gleiche Abschätzung für B_n . Die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt unmittelbar aus den Eindeutigkeitsaussagen von Satz 3 und (2, I).

Für die einzelnen Operatoren B_n kann nun die SCHMEIDLERsche zweistreifige Matrixdarstellung erhalten werden. Der Operator B ist dann vollständig bestimmt durch die Relationen

$$B e_k^0 = 0,$$

$$B e_{n,k} = a_{n,k} \bar{e}_{n,k} + b_{n,k} \bar{e}_{n,k+1}.$$

Hieraus erhält man nun das folgende Resultat für die Gleichungstheorie:

Die Gleichung

$$B x = y \quad \text{mit} \quad y = \sum_k y_k^0 \bar{e}_k^0 + \sum_n \sum_k y_{n,k} \bar{e}_{n,k} = y^0 + \sum_n y_n$$

ist dann und nur dann auflösbar, wenn

1. $y_k^0 = 0$ für alle k , d. h. $y^0 = 0$ und
2. $\sum_n 2^{-2n} \sum_k |y_{n,k}|^2 < \infty$, d. h. $\sum_n 2^{-2n} \|y_n\|^2 < \infty$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält man alle Lösungen in der Form

$$x = \sum x_k^0 e_k^0 + \sum_n \sum_k x_{n,k} e_{n,k} = x^0 + \sum_n x_n$$

mit $\sum |x_k^0|^2 < \infty$ (x_k^0 sonst beliebig) und

$$x_{n,k+1} = a_{n,k+1}^{-1} \{y_{n,k+1} - b_{n,k} x_{n,k}\}.$$

Für selbstadjungierte Operatoren erhält man aus der Zerlegung in selbstadjungierte, beschränkte, direkte Summanden unter Benutzung der SCHMEIDLERschen Konstruktion eine Darstellung durch dreistreifige JACOBISCHE Matrizen, die für die Behandlung des Eigenwertproblems $Ax = \lambda x$ geeignet ist. A ist dann bestimmt durch die Relationen

$$A e_k^0 = 0$$

$$A e_{n,k}^\pm = b_{n,k-1}^\pm e_{n,k-1}^\pm + a_{n,k}^\pm e_{n,k}^\pm + b_{n,k}^\pm e_{n,k+1}^\pm.$$

Das Eigenwertproblem führt auf das Gleichungssystem

$$b_{n,k}^\pm x_{n,k+1}^\pm + (a_{n,k}^\pm - \lambda) x_{n,k}^\pm + b_{n,k-1}^\pm x_{n,k-1}^\pm = 0,$$

das stets rekursiv auflösbar ist, da aus $b_{n,i} = 0$ auch $b_{n,i-1} = 0$ folgt. λ ist genau dann Eigenwert von A , wenn für das n mit $2^n < \pm \lambda \leq 2^{n+1}$ und eine geeignete Limeszahl k_0 $\sum_{k_0 \leq k < k_0 + \omega} |x_{n,k}^\pm|^2$ oder $\sum_{k_0 \leq k < k_0 + \omega} |x_{n,k}^\mp|^2$ mit $x_{n,k_0}^\pm \neq 0$ konvergiert.

Es sind damit für beliebige abgeschlossene Operatoren Normalformen gewonnen worden, die die rekursive Auflösung der zugehörigen Gleichungen ermöglichen und einen Überblick über die Lösungsmannigfaltigkeiten und den Wertbereich des Operators liefern.

Es ist jedoch nicht in einfacher Weise zu entscheiden, ob sich eine so gefundene Normalform noch weiter vereinfachen und etwa auf Diagonalform bringen läßt.

Zu endgültigen Normalformen gelangt man, wenn man zur Umformung nicht nur unitäre Operatoren, d. h. Übergang zu neuen v. O. S., sondern eine allgemeinere Klasse von Operatoren zuläßt. Man gelangt dann zu einer zweiten Form der Gleichungstheorie, die in den beiden folgenden Paragraphen behandelt wird.

§ 3. Affine Transformation der quadratischen Formen.

Jede endliche symmetrische Matrix bzw. jede quadratische Form in endlich vielen Unbekannten läßt sich bekanntlich durch affine Transformation auf eine Diagonalform bringen, derart, daß die Diagonalelemente nur die Werte 0, +1, -1 annehmen. Die Vielfachheiten dieser Werte bilden ein vollständiges affines Invariantensystem.

Unter Benutzung der Spektraltheorie gelang G. KÖTHE¹⁴⁾ eine sinngemäße Übertragung dieser Ergebnisse auf selbstadjungierte Operatoren bzw. quadratische Formen im HILBERTschen Raum. Diese Resultate lassen sich nur auf Grund der DIXMIERSchen Ergebnisse (2, I) und (2, II) völlig spektraltheoriefrei herleiten.

¹⁴⁾ KÖTHE, G.: Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen im HILBERTschen Raum. Math. Z. 41, 137—152 (1936).

Definition 3. Zwei Operatoren A und B heißen zueinander affin, wenn es eine intakte (= topologische) lineare Transformation Q des Raumes gibt, so daß gilt: $A = Q^* B Q$.

Die Affinität ist eine Äquivalenzrelation und aus abgeschlossenen bzw. selbstadjungierten Operatoren gehen durch affine Transformation nur wieder abgeschlossene bzw. selbstadjungierte Operatoren hervor. Der erste Teil der KÖTHESchen Ergebnisse, den wir hier neu beweisen, lautet:

Satz 5: Jeder selbstadjungierte Operator A ist affin zu einem Diagonaloperator D , und zwar gilt

$$A = Q^* D Q$$

wobei Q selbstadjungiert, positiv, intakt und mit A und D vertauschbar ist. D hat also den gleichen Definitions- und Wertbereich wie A ¹⁵⁾.

Beweis. Nach Satz 3 können wir jeden selbstadjungierten Operator A schreiben in der Form $A = A^0 \oplus \sum \oplus A_n^+ \oplus \sum \oplus A_n^-$ mit $2^n < A_n^+ \leq 2^{n+1}$, $2^n < -A_n^- \leq 2^{n+1}$. Für $B_n^+ = 2^{-n}$, A_n^+ , $B_n^- = -2^{-n}$, A_n^- ergibt sich dann

$$A = A^0 \oplus \sum \oplus 2^n B_n^+ \oplus \sum \oplus -2^n \cdot B_n^- \quad \text{mit} \quad 1 < B_n^\pm \leq 2.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Darstellung $A = D B = B D$, wobei B selbstadjungiert, positiv ($1 < B \leq 2$) und mit A und dem Diagonaloperator D vertauschbar ist.

Sei nun Q die positiv-selbstadjungierte Quadratwurzel aus B . Dann ist auch Q mit A und D vertauschbar und es gilt $1 < \frac{|Qx|}{|x|} \leq \sqrt{2}$. Q ist also intakt, und wir haben $A = D Q^2 = Q^2 D = Q D Q = Q^* D Q$. Hieraus folgt auch sofort

$$\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_D, \quad \mathfrak{B}_A = \mathfrak{B}_D.$$

Die Frage, wann zwei selbstadjungierte Diagonaloperatoren zueinander affin sind, wurde von KÖTHE [a. a. O.¹⁴⁾] auch bereits mit elementaren Hilfsmitteln geklärt:

(3, I) Zwei selbstadjungierte Diagonaloperatoren sind dann und nur dann zueinander affin, wenn bei einer Darstellung durch Diagonalmatrizen die Anzahlen der Nullen in der Hauptdiagonalen übereinstimmen und die von Null verschiedenen Diagonalelemente sich einander umkehrbar eindeutig so zuordnen lassen, daß die Quotienten einander zugeordneter Elemente zwischen festen positiven Schranken liegen.

Für intakte, selbstadjungierte Operatoren bedeutet dies, daß man die Diagonalelemente zu $+1$ und -1 machen kann, wie es auch im endlichen möglich ist.

Das affine Äquivalenzproblem für selbstadjungierte Operatoren ist damit vollständig gelöst ohne Benutzung spektraltheoretischer Hilfsmittel. Ein völliger Verzicht auf jegliche analytischen Begriffsbildungen ist wohl schon

¹⁵⁾ KÖTHE, G.: a. a. O. ¹⁴⁾.

deswegen unmöglich, weil bereits bei der genauen Definition eines Diagonaloperators Konvergenzbetrachtungen für Folgen von Elementen aus $\mathfrak{H}$ in demselben Umfang erforderlich sind, wie sie hier mit dem Satz von der Existenz der Quadratwurzel eines beschränkten positiv-selbstadjungierten Operators benutzt worden sind.

§ 4. Gleichungstheorie abgeschlossener Operatoren als Äquivalenzproblem.

Im § 2 hatten wir die Lösungen der Gleichungen $A \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ durch den Übergang zu geeigneten Orthonormalsystemen zu gewinnen versucht. Das ist aber offenbar gleichwertig dem Übergang von A zu einem Operator $A' = U A V$, wobei U und V unitäre Operatoren sind. Man kann aber für die Überführung in eine Normalform auch allgemeinere, etwa topologische (= intakte) lineare Abbildungen von $\mathfrak{H}$ zulassen.

Definition 4. *Zwei Operatoren A und B heißen zueinander äquivalent, wenn es topologische lineare Abbildungen Q', Q'' von $\mathfrak{H}$ gibt, so daß gilt $A = Q' B Q''$.*

Da diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, liefert sie eine Einteilung der Operatoren in Äquivalenzklassen. Das Gleichungsproblem kann man dann darin sehen, einen Überblick über diese Klassen zu gewinnen und für wenigstens einen Operator jeder Klasse die zugehörigen Gleichungen aufzulösen.

Die Normalformen, auf die sich jeder abgeschlossene Operator durch äquivalente Umformung zurückführen läßt, sind Operatoren, die sich bezüglich eines v. O. S. durch eine Matrix darstellen lassen, die durch Streichen der Nullzeilen und Nullspalten in eine positiv reelle Diagonalmatrix übergeht. Operatoren dieses Typs werden im folgenden stets mit G bezeichnet.

Mit elementaren Hilfsmitteln bewies G. KÖTHE¹⁶⁾:

(4, I) *Zwei Operatoren vom Typus G sind dann und nur dann äquivalent, wenn die sie darstellenden Matrizen die gleiche Anzahl von Nullzeilen und Nullspalten enthalten und wenn die von Null verschiedenen Matrixelemente sich einander umkehrbar-eindeutig so zuordnen lassen, daß die Quotienten der Beträge einander zugeordneter Elemente zwischen festen positiven Schranken liegen.*

Noch entscheidender ist für die Gleichungstheorie das folgende Ergebnis KÖTHEs, das wir ohne Spektraltheorie beweisen:

Satz 6: *Jeder abgeschlossene Operator A hat die Form*

$$A = U G Q = U' G Q',$$

wobei U, U' unitäre und Q, Q' intakte lineare Transformationen sind. Jeder abgeschlossene Operator ist also einem Operator vom Typus G äquivalent.

Beweis. Nach (2, I) erhalten wir $A = J B = B' J'$, wo J, J' isometrisch, B, B' selbstadjungiert und nichtnegativ sind. Nach Satz 5 kann man schreiben $B = D Q$, $B' = Q' D'$ und damit $A = J D Q = Q' D' J'$. Wie KÖTHE bereits elementar zeigt, läßt sich zu J und D ein unitärer Operator U konstruieren,

¹⁶⁾ KÖTHE, G.: a. a. O. 5).

so daß gilt $U^* J D = G$, also $J D = U G$. Ganz analog erhält man $D' J' = G' U'$ und so $A = U G Q = Q' G' U'$. Da G und G' äquivalent sind, läßt sich wegen (4, I) auch schreiben $G' = Q'' G U''$ mit intaktem Q'' und unitärem U'' . Setzen wir dies aber ein, so erhalten wir

$$A = U G Q = Q' Q'' G U'' U' \quad \text{w. z. b. w.}$$

Damit ist auch spektraltheoriefrei der Überblick über die Äquivalenzklassen gewonnen. Für die Gleichungen $G \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ läßt sich aber sofort ein einfaches Lösbarkeitskriterium angeben, und sämtliche Lösungen lassen sich explizit darstellen [a. a. O.¹⁶⁾].

§ 5. Gleichungstheorie Juliascher Operatoren.

In der Klasse der abgeschlossenen Operatoren sind Addition und Multiplikation nicht unbeschränkt durchführbar, ja Summen und Produkte abgeschlossener Operatoren brauchen nicht einmal mehr eine abgeschlossene Erweiterung besitzen. Für viele Untersuchungen ist es aber wünschenswert, eine übersichtliche Klasse von Operatoren zur Verfügung zu haben, in der man beliebig addieren und multiplizieren kann, die aber auch alle abgeschlossenen Operatoren enthält. Eine solche Klasse ist in den letzten Jahren von G. JULIA und J. DIXMIER¹⁷⁾ in den JULIASchen Operatoren näher untersucht worden.

Definition 5. Ein linearer (ein- oder mehrdeutiger) Operator A heißt JULIAScher Operator, wenn sein „Bild“, die Menge aller Vektoren $\langle \mathfrak{x}; A \mathfrak{x} \rangle$ in $\mathfrak{H}^2$, Existenzbereich eines abgeschlossenen Operators ist.

Zu den JULIASchen Operatoren gehören also alle abgeschlossenen Operatoren und mit A gehört auch A^{-1} dazu. Wir werden uns für die Gleichungstheorie auf die folgenden Sätze stützen, in denen einige wesentliche Eigenschaften JULIAScher Operatoren zum Ausdruck kommen¹⁸⁾.

(5, I) Das Produkt endlich vieler JULIAScher Operatoren ist wieder ein JULIAScher Operator.

(5, II) Jeder JULIAScher Operator A ist (auf unendlich viele Weisen) darstellbar als Produkt $A = B' B''$, wobei B' und B''^{-1} abgeschlossen und beschränkt sind mit $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{B''}$, $\mathfrak{B}_A = \mathfrak{B}_{B'}$.

(5, III) Definitions- und Wertbereiche JULIAScher Operatoren sind stets auch Definitionsbereiche abgeschlossener Operatoren.

(5, IV) Jeder eindeutige JULIASche Operator, dessen Definitionsbereich abgeschlossen ist, ist abgeschlossen und beschränkt.

Wir wollen zunächst zeigen, daß wir durch äquivalente Umformungen nur für die abgeschlossenen Operatoren brauchbare Normalformen erhalten, jedoch nicht für die übrigen JULIASchen Operatoren.

Satz 7: Jeder Operator, der äquivalent ist zu einem Operator mit einer zeilenfiniten Matrixdarstellung, ist abgeschlossen.

¹⁷⁾ Bei J. DIXMIER (a. a. O. ⁶⁾, finden sich die wichtigsten Ergebnisse und ausführliche Angaben der entsprechenden Arbeiten.

¹⁸⁾ DIXMIER, J.: a. a. O. ⁶⁾ Théorèmes (3,1), (3,2), (3,3) und (3,4).

Beweis. A sei bezüglich eines v.O.S. e_k definiert durch die zeilenfinite Matrix (a_{ik}) , d.h. A ist definiert für alle Vektoren $x = \sum x_k e_k$, für die $i \sum (k \sum a_{ik} x_k) e_i = A x$ ein Vektor aus $\mathfrak{S}$ ist. Sei nun $x_n \in \mathfrak{D}_A$, $x_n \rightarrow x$ und $A x_n \rightarrow x'$. Es gilt dann insbesondere

$$x_k^{(n)} = (x_n, e_k) \rightarrow (x, e_k) = x_k; \quad (A x_n, e_i) = k \sum a_{ik} x_k^{(n)} \rightarrow x'_i = (x', e_i).$$

Einerseits ist nun $\lim_{n \rightarrow \infty} k \sum a_{ik} x_k^{(n)} = x'_i$, andererseits, da nur endlich viele Glieder auftreten, $\lim_{n \rightarrow \infty} k \sum a_{ik} x_k^{(n)} = k \sum a_{ik} x_k$. Es gilt also

$$x' = \sum x'_i e_i = i \sum (k \sum a_{ik} x_k) e_i = A x.$$

Das heißt aber, daß A abgeschlossen ist. Da durch äquivalente Umformung abgeschlossene Operatoren stets in abgeschlossene Operatoren übergehen, ist damit der Satz bewiesen¹⁹⁾.

Wir müssen also zur Umformung der JULIASchen Operatoren auch eineindeutige Transformationen zulassen, die nicht mehr samt ihrer Umkehrung beschränkt sind. Es genügt aber, wenn wir nur in der einen Richtung auf die Beschränktheit verzichten:

Satz 8: Jeder (eindeutige) dicht definierte JULIASche Operator A läßt sich durch linksseitige Multiplikation mit einer topologischen (intakten) und rechtsseitige Multiplikation mit einer eineindeutigen und stetigen (beschränkten) Transformation überführen in einen beschränkten Operator vom Typus G , und zwar gilt:

$$G = Q A \bar{D} = U A S, \quad \mathfrak{D}_A = \mathfrak{B}_{\bar{D}} = \mathfrak{B}_S,$$

wobei U unitär, Q topologisch, S und $\bar{D}$ eineindeutig und stetig sind. $\bar{D}$ läßt sich bezüglich zweier v.O.S. durch eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen ≤ 1 darstellen²⁰⁾.

Beweis. $\mathfrak{D}_A$ ist nach (5, III) Definitionsbereich eines abgeschlossenen Operators B , der sich nach (2, I) in der Form $B = JC$ darstellen läßt, so daß $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_B = \mathfrak{D}_C$. Nach Satz 5 gibt es dann einen selbstadjungierten Diagonaloperator D mit den Eigenwerten d_i und den zugehörigen Eigenvektoren e_i ,

¹⁹⁾ Bereits aus der Bedingung $\sum_k a_{ik}^2 < \infty$ für alle i (die E. SCHMIDT seiner Gleichungstheorie zugrunde legt) würde folgen, daß der durch die Matrix (a_{ik}) dargestellte Operator abgeschlossen ist, da dann ebenfalls noch $\sum a_{ik} x_k^{(n)}$ gegen $\sum a_{ik} x_k$ konvergieren würde. Die von E. SCHMIDT (Rendiconti di Palermo, XXV. 1908, S. 53—77) betrachteten Matrizen lassen sich also sämtlich auffassen als Darstellungen abgeschlossener Operatoren bezüglich eines v. O. S., das zugleich auch im Definitionsbereich der Adjungierten enthalten ist.

²⁰⁾ Dieses Ergebnis läßt sich auch mit Hilfe eines abgeschwächten Äquivalenzbegriffs formulieren: A und A' heißen schwach äquivalent, wenn es einen beschränkten Operator C gibt, so daß mit intakten Operatoren Q, Q' und eineindeutigen und beschränkten Operatoren S, S' gilt $C = Q A S = Q' A' S'$ mit $\mathfrak{B}_S = \mathfrak{D}_A$; $\mathfrak{B}_{S'} = \mathfrak{D}_{A'}$. Das Resultat lautet dann: 1. Jeder eindeutige JULIASche Op. ist schwach äquivalent zu einem beschränkten Op. vom Typus G . 2. Zwei beschränkte Op. vom Typus G sind dann und nur dann schwach äquivalent, wenn sie äquivalent sind (Def. 4).

die ein v.O.S. bilden, der denselben Definitionsbereich hat wie C und A . $\mathfrak{D}_A$ besteht also aus allen Vektoren $x = \sum x_i e_i$, für die $\sum |x_i|^2$ und $\sum |x_i d_i|^2$ konvergieren. Diese Konvergenzbedingung ist gleichwertig mit der Forderung $\sum |x_i|^2 < \infty$ und $\sum |x_i \cdot a_i^{-1}| < \infty$ mit $a_k = \min(d_k^{-1}, 1)$. Definiert man einen weiteren Diagonaloperator D_0 durch $D_0 e_k = a_k e_k$, so gilt $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{D_0}$. Der JULIASche Operator AD_0 ist also überall definiert und daher nach (5, IV) beschränkt. Nach Satz 6 hat AD_0 die Form $AD_0 = UGQ = Q'GU'$, also $G = U^*A(D_0Q^{-1}) = Q'^{-1}A(D_0U'^*)$. Damit sind alle Behauptungen des Satzes bewiesen.

Ist A ein JULIAScher Operator, so läßt sich die Gleichung $Ax = y$ also durch Transformationen $y' = Uy$, $x = Sx'$ überführen in eine Gleichung $Gx' = y'$, die bei Benutzung eines geeigneten v.O.S. e'_i auf das Gleichungssystem

$$g_i x_{m_i} = y_{n_i}$$

$$0 = y_k \quad \text{für} \quad k \neq n_i$$

führt, das unmittelbar lösbar ist. Setzt man $e'_i = Ue_i$, so erhält man das folgende Lösbarkeitskriterium:

Zu jedem JULIASchen Operator A gibt es ein v.O.S. e_i und eine Folge von positiv reellen Zahlen $g_i \leq 1$, so daß die Gleichung $Ax = y$ mit $y = \sum y_i e_i$ dann und nur dann lösbar ist, wenn

$$1. \sum |y_{n_i} \cdot g_i^{-1}|^2 < \infty;$$

$$2. y_k = 0, \text{ wenn } k \neq n_i.$$

$x = S(\sum y_{n_i} g_i^{-1} e'_{m_i}) = S(\sum_{k \neq m_i} x_k e'_k)$ ist dann die allgemeine Lösung, wobei die $x_k (k \neq m_i)$ nur der Bedingung $\sum_{k \neq m_i} |x_k|^2 < \infty$ unterliegen.

Damit ist auch für JULIASche Operatoren eine Gleichungstheorie entwickelt worden, die abgesehen von Konvergenzbetrachtungen für Folgen von Vektoren aus $\mathfrak{H}$ nur algebraische Hilfsmittel und Begriffe benutzt.

Münster i. W., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 31. Oktober 1952.)

Ebene Variationsprobleme mit freien Endpunkten.

Von

OTTO FÖLLINGER.

In der vorliegenden Arbeit werden Variationsprobleme des einfachsten Typs behandelt, also Probleme ohne Nebenbedingungen, deren zulässige Kurven in der x, y -Ebene gelegen sind. Diese Kurven mögen in Parameterdarstellung gegeben sein und in dem offenen Bereich $\mathfrak{G}_2$ liegen. Betreffs jedes ihrer beiden Endpunkte bestehen drei verschiedene Möglichkeiten: er kann fest, auf einer gegebenen Kurve beweglich oder in $\mathfrak{G}_2$ frei beweglich sein. Die Fälle, in denen ein Endpunkt fest ist und der andere sich auf einer gegebenen Kurve bewegt bzw. beide Endpunkte auf gegebenen Kurven liegen, sind bereits vollständig behandelt. Probleme mit einem festen und einem frei beweglichen Endpunkt wurden von A. RASMADSE untersucht¹⁾. Im folgenden sollen Variationsprobleme betrachtet werden, bei denen entweder beide Endpunkte der zulässigen Kurven frei beweglich sind oder dies doch für einen der Fall ist, während der andere auf einer gegebenen Kurve liegt. Und zwar soll hierfür das Problem des relativen Minimums behandelt werden. Zuvor werde jedoch das Variationsproblem mit einem festen und einem freien Endpunkt kurz betrachtet.

Was die Bezeichnungsweise anbetrifft, wird die von O. BOLZA in seinem Buch „Vorlesungen über Variationsrechnung“ angewandte Terminologie benutzt. Es ist im folgenden mit „BOLZA“ zitiert.

I. Probleme mit einem festen und einem frei beweglichen Endpunkt.

1. *Zulässige Kurven.* Gegeben seien ein Gebiet $\mathfrak{G}_2$ der x, y -Ebene und ein Punkt $P_1 \in \mathfrak{G}_2$. Eine stückweis glatte Kurve $C: x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$ heiße zulässig, wenn

$$(1) \quad (x(t), y(t)) \in \mathfrak{G}_2 \quad \text{für} \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$(2) \quad (x(t_1), y(t_1)) = P_1,$$

$$(3) \quad P_2 = (x(t_2), y(t_2)) \neq P_1.$$

2. *Der Integrand* $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ des zu einem Minimum zu machenden Integrals $I(C) = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt$ sei in dem Bereich $\mathfrak{G}_4: (x, y) \in \mathfrak{G}_2, \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ von der Klasse $C^{(4)} 2)$, und es gelte $F(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = kF(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ für $k > 0$.

¹⁾ Math. Ann. **75**, 380—401 (1914).

²⁾ Definition der Klasse $C^{(n)}$ bei BOLZA, 13.

3. *Relatives Minimum.* Die zulässige Kurve $E_0: x = x_0(t), y = y_0(t), t_1 \leq t \leq t_2$, liefert ein relatives starkes Minimum von $I(C)$, wenn eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von E_0 , d.h. eine in $\mathfrak{G}_2$ gelegene und E_0 im Innern enthaltende Punktmenge sowie eine Umgebung $\mathfrak{B}$ von P_2 mit $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ und $P_1 \notin \mathfrak{B}$ existiert derart, daß für jede zulässige Kurve $C \subset \mathfrak{U}$ mit $(x(t_2), y(t_2)) \in \mathfrak{B}$ $I(C) \geq I(E_0)$ gilt. Das Minimum heißt eigentlich, wenn $I(C) = I(E_0)$ nur für $C = E_0$.

4. *Voraussetzungen über E_0 .* Wenn die zulässige Kurve $E_0: x = x_0(t), y = y_0(t), t_1 \leq t \leq t_2$, glatt ist und ein Minimum liefert, muß sie eine Extremale sein und die LEGENDRE-, JACOBI- und WEIERSTRASS-Bedingung erfüllen. Es werde daher im folgenden vorausgesetzt: E_0 ist eine Extremale und erfüllt die verschärfte LEGENDRE-Bedingung. Dann läßt sich E_0 unter Beibehaltung sämtlicher Eigenschaften auf ein Intervall $[T_1, T_2]$ mit $T_1 < t_1, T_2 > t_2$ fortsetzen. Es sei $x_0(t_1) = a_1, y_0(t_1) = b_1, \dot{x}_0(t_1) = \dot{a}_1, \dot{y}_0(t_1) = \dot{b}_1, \ddot{x}_0(t_1) = \ddot{a}_1, \ddot{y}_0(t_1) = \ddot{b}_1$, entsprechend $x_0(t_2) = a_2, y_0(t_2) = b_2$ etc. und weiterhin $(a_1, b_1) = P_1, (a_2, b_2) = P_2$. Der Tangentenwinkel von E_0 in t_1 bzw. t_2 sei α_1 bzw. α_2 . Die Gesamtheit dieser Voraussetzungen sei kurz mit (V) bezeichnet. Nimmt man zusätzlich an, daß E_0 die verschärfte JACOBI-Bedingung erfüllt, so seien die so erweiterten Voraussetzungen durch (V') symbolisiert.

5. *Notwendige und hinreichende Bedingungen.* Liefert E_0 unter den Voraussetzungen (V') ein relatives Minimum, so gelten die Gleichungen

$$(A_2) \quad F_x(a_2, b_2, \cos \alpha_2, \sin \alpha_2) = 0, \quad F_y(a_2, b_2, \cos \alpha_2, \sin \alpha_2) = 0$$

sowie die Ungleichung

$$(B_2) \quad \dot{a}_2 F_x(a_2, b_2, \cos \alpha_2, \sin \alpha_2) + \dot{b}_2 F_y(a_2, b_2, \cos \alpha_2, \sin \alpha_2) \geq 0^3).$$

Wird sie durch Weglassen des Gleichheitszeichens verschärft, so sei sie mit (B'_2) bezeichnet. Der Fall

$$\dot{a}_2 F_x(a_2, b_2, \cos \alpha_2, \sin \alpha_2) + \dot{b}_2 F_y(a_2, b_2, \cos \alpha_2, \sin \alpha_2) = 0$$

wird im folgenden nicht berücksichtigt. Denn wenn er vorliegt, liefert E_0 im allgemeinen kein Minimum⁴⁾.

Auf Grund von (A_2) und (B'_2) existiert ein Funktionentripel $x = \xi(a), y = \eta(a), \Theta = \vartheta(a), |a - a_0| \leq \delta$, mit $\xi(a_0) = a_2, \eta(a_0) = b_2, \vartheta(a_0) = \alpha_2$ derart, daß durch diese drei Funktionen die EULER-LAGRANGESchen Gleichungen in der BLISSschen Form⁵⁾ und außerdem die Gleichungen $F_x(x, y, \cos \Theta, \sin \Theta) = 0, F_y(x, y, \cos \Theta, \sin \Theta) = 0$ erfüllt werden. $r: x = \xi(a), y = \eta(a), |a - a_0| \leq \delta$, ist eine glatte Jordankurve, die als Rißpunktkurve bezeichnet wird. Die durch $x = \xi(a), y = \eta(a), \Theta = \vartheta(a)$ bestimmten Linienelemente heißen Rißelemente⁶⁾. Durch jeden Punkt der Rißpunktkurve geht in der Richtung $\vartheta(a)$ genau eine Extremale. Die hierdurch bestimmte einparametrische Extremalenschar

$$a: x = \varphi(t, a), \quad y = \psi(t, a), \quad T_1 \leq t \leq T_2, \quad |a - a_0| \leq \delta,$$

³⁾ RASMADSE, a. a. O., 383, 384.

⁴⁾ RASMADSE, a. a. O., 392.

⁵⁾ BOLZA, 212—213.

⁶⁾ Bezeichnungen nach RASMADSE, a. a. O., 384—385.

welche E_0 für $a = a_0$ enthält, werde Rißextremalenschar genannt. Man kann den Parameter a der Rißpunktkurve so wählen, daß entweder $\dot{\xi}(a) = -F_y(t_2, a)$, $\dot{\eta}(a) = F_x(t_2, a)$ oder $\dot{\xi}(a) = F_y(t_2, a)$, $\dot{\eta}(a) = -F_x(t_2, a)$. Im ersteren (letzteren) Fall folgt aus (B'_2) , daß der Bogen $[t_1, t_2]$ von E_0 in der Umgebung von (t_2, a_0) auf der positiven (negativen) Seite der Rißpunktkurve gelegen ist.

Unter den Voraussetzungen (V') , (A_2) , (B'_2) ergibt sich als letzte notwendige Bedingung (C_2) : Der linksseitige Brennpunkt t''''_2 von a auf E_0 liegt nicht in $(t_1, t_2]$. Dabei ist t''''_2 definiert als die erste vor t_2 gelegene Nullstelle von $\Delta(t, a_0)$, wenn $\Delta(t, a)$ die Schardeterminante von a darstellt. $\Delta(t, a_0)$ ist eine nichttriviale Lösung der zu E_0 gehörigen JACOBISCHEN Differentialgleichung, welche der Anfangsbedingung $A_2 \Delta(t_2, a_0) + B_2 \Delta_t(t_2, a_0) = 0$ genügt, wobei $A_2 = LN - M^2|_2$, $B_2 = F_1(\dot{a}_2 F_x + \dot{b}_2 F_y)|_2$ ⁷⁾. Die Ungleichung $t''''_2 < t_1$ werde mit (C'_2) bezeichnet.

Ist E_0 doppelpunktfrei und genügt den Voraussetzungen (V) , (A_2) , (B'_2) und (C'_2) sowie der verschärften WEIERSTRASS-Bedingung, so erzeugt E_0 ein relatives starkes eigentliches Minimum von $I(C)$. Erfüllt E_0 statt (C'_2) nur (C_2) , so liefert E_0 im allgemeinen kein Minimum, wie man mit Hilfe des Enveloppensatzes zeigt.

6. *Variationsprobleme mit freiem Anfangspunkt und festem Endpunkt.* Bei diesen Problemen ergeben sich als notwendige Bedingungen für ein relatives Minimum durch E_0 unter den Voraussetzungen (V') zunächst

$$(A_1) \quad F_x|_1 = 0, \quad F_y|_1 = 0,$$

$$(B_1) \quad \dot{a}_1 F_x + \dot{b}_1 F_y|_1 \leq 0.$$

Setzt man zusätzlich (A_1) und (B'_1) voraus, so existiert durch P_1 die Rißpunktkurve r mit ihrer Rißextremalenschar α . Mit den Voraussetzungen (V') , (A_1) , (B'_1) erhält man die notwendige Bedingung (C_1) : Der rechtsseitige Brennpunkt t''_1 von a auf E_0 liegt nicht in $[t_1, t_2)$. Dabei ist t''_1 definiert als die erste auf t_1 folgende Nullstelle von $\Delta(t, a_0)$. $\Delta(t, a_0)$ wiederum ist gegeben als eine nichttriviale Lösung der zu E_0 gehörigen JACOBISCHEN Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $A_1 \Delta(t_1, a_0) + B_1 \Delta_t(t_1, a_0) = 0$ erfüllt. Dabei ist $A_1 = LN - M^2|_1$, $B_1 = F_1(\dot{a}_1 F_x + \dot{b}_1 F_y)|_1$.

II. Probleme mit frei beweglichen Endpunkten.

1. *Zulässige Kurven.* Gegeben ein Gebiet $\mathfrak{G}_2$ der x, y -Ebene. Die stückweis glatte Kurve $C: x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$, heiße zulässig, wenn

$$(1) \quad (x(t), y(t)) \in \mathfrak{G}_2 \quad \text{für} \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$(2) \quad (x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2)).$$

Der Integrand $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ des Variationsintegrals $I(C)$ erfülle dieselben Voraussetzungen wie in I.2.

⁷⁾ Das Zeichen $|_1$ bzw. $|_2$ soll andeuten, daß der vorhergehende Ausdruck an der Stelle P_1 bzw. P_2 zu nehmen ist.

2. *Relatives Minimum.* Die zulässige Kurve $E_0: x = x_0(t), y = y_0(t), t_1 \leq t \leq t_2$, mit dem Anfangspunkt $(x_0(t_1), y_0(t_1)) = P_1$ und dem Endpunkt $(x_0(t_2), y_0(t_2)) = P_2$ liefert ein relatives starkes Minimum von $I(C)$, wenn eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von E_0 und eine Umgebung $\mathfrak{B}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_2$ von P_1 bzw. P_2 mit $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 = 0$ existieren derart, daß für jede zulässige Kurve $C \subset \mathfrak{U}$ mit $(x(t_1), y(t_1)) \in \mathfrak{B}_1$ und $(x(t_2), y(t_2)) \in \mathfrak{B}_2$ $I(C) \geq I(E_0)$ gilt. Definition des eigentlichen Minimums wie in I.3.

3. *Voraussetzungen.* Es seien die Voraussetzungen (V') erfüllt und E_0 liefere ein relatives Minimum. Dann erzeugt E_0 auch ein Minimum unter allen in $\mathfrak{U}$ gelegenen zulässigen Kurven, welche in P_1 beginnen und in $\mathfrak{B}_2$ endigen bzw. in $\mathfrak{B}_1$ beginnen und in P_2 endigen. Daher befriedigt E_0 (A_1) und (B_1), (A_2) und (B_2). Setzt man nun zusätzlich (A_1), (B_1'), (A_2), (B_2') voraus, so genügt E_0 (C_1) und (C_2).

Es werde im folgenden die Gültigkeit von (V'), (A_1), (B_1'), (C_1'), (A_2) und (B_2') vorausgesetzt. Es geht dann durch P_1 die Rißpunktcurve

$$r: x = \xi(a), \quad y = \eta(a), \quad |a - a_0| \leq \delta,$$

und es existiert die zugehörige Rißextremalenschar

$$a: x = \varphi(t, a), \quad y = \psi(t, a), \quad T_1 \leq t \leq T_2, \quad |a - a_0| \leq \delta.$$

Der Tangentenwinkel dieser Schar auf r sei $\vartheta(a)$, ihre Determinante $\Delta(t, a)$. Durch P_2 geht die Rißpunktcurve $\bar{r}$, die zugehörige Rißextremalenschar sei $\bar{a}$, ihre Schardeterminante $\bar{\Delta}$, ihr Tangentenwinkel auf $\bar{r}$ $\bar{\vartheta}$. Bringt man die Schar a mit $\bar{r}$ zum Schnitt, so erkennt man, daß a auch auf $\bar{r}$ als Kurvenparameter und damit in $\bar{a}$ als Scharparameter eingeführt werden kann. Dann sind $\bar{r}$ und $\bar{a}$ gegeben durch die Gleichungen

$$\bar{r}: x = \bar{\xi}(a), \quad y = \bar{\eta}(a), \quad |a - a_0| \leq \delta,$$

und

$$\bar{a}: x = \bar{\varphi}(t, a), \quad y = \bar{\psi}(t, a), \quad T_1 \leq t \leq T_2, \quad |a - a_0| \leq \delta.$$

Der Kurvenparameter t der Schar a kann außerdem so gewählt werden, daß $\varphi(t_2, a) = \bar{\xi}(a)$, $\psi(t_2, a) = \bar{\eta}(a)$, $|a - a_0| \leq \delta$, ist. Im folgenden werde $F(\varphi(t, a), \dots, \psi_t(t, a)) = F(t, a)$, $F(\bar{\varphi}(t, a), \dots, \bar{\psi}_t(t, a)) = \bar{F}(t, a)$ gesetzt. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $\Delta(t, a_0) > 0$ in $[t_1, t_2]$. Dann ist $\bar{\Delta}(t_2, a_0) = \Delta(t_2, a_0) > 0$. a kann so gewählt werden, daß $\dot{\xi}(a) = -\bar{F}_y(t_2, a)$, $\dot{\eta}(a) = \bar{F}_x(t_2, a)$. Der Bogen $[t_1, t_2]$ von E_0 liegt bei (t_1, a_0) bzw. (t_2, a_0) auf der negativen Seite von r bzw. der positiven Seite von $\bar{r}$.

II. $\Delta(t, a_0) < 0$ in $[t_1, t_2]$, also $\bar{\Delta}(t_2, a_0) = \Delta(t_2, a_0) < 0$. Dann kann a so gewählt werden, daß $\dot{\xi}(a) = \bar{F}_y(t_2, a)$, $\dot{\eta}(a) = -\bar{F}_x(t_2, a)$. E_0 liegt bei (t_1, a_0) bzw. (t_2, a_0) auf der positiven Seite von r bzw. der negativen Seite von $\bar{r}$.

Anschließend seien noch einige Relationen zwischen a und $\bar{a}$ zusammengestellt. Es ist $\varphi(t_2, a) = \bar{\xi}(a) = \bar{\varphi}(t_2, a)$, $\psi(t_2, a) = \bar{\eta}(a) = \bar{\psi}(t_2, a)$ in $|a - a_0| \leq \delta$. Außerdem gilt $\varphi(t, a_0) = x_0(t) = \bar{\varphi}(t, a_0)$, $\psi(t, a_0) = y_0(t) = \bar{\psi}(t, a_0)$ in $T_1 \leq t \leq T_2$.

Aus diesen Relationen folgt, daß in (t_2, a_0) $F = \bar{F}$, $F_x = \bar{F}_x$ etc. Die Gesamtheit aller dieser Voraussetzungen werde mit (W) bezeichnet.

4. Um weitere notwendige Bedingungen dafür herzuleiten, daß E_0 ein Minimum liefert, werde das Scharintegral auf der Ribextremalenschar a betrachtet: $u(t, a) = \int_{t_1}^t F(\tau, a) d\tau$, $t_1 \leq t \leq T_2$, $|a - a_0| \leq \delta$. Für ein Minimum von $I(C)$ durch E_0 ist dann notwendig:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial a} = 0; \\ (b) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \geq 0; \\ (c) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial a} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

für $(t, a) = (t_2, a_0)$. Da r Transversale der Schar a ist, berechnen sich die Ableitungen von $u(t, a)$ zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= F, \quad \frac{\partial u}{\partial a} = F_x \varphi_a + F_y \psi_a, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= F_x \varphi_t + F_y \psi_t + F_{xx} \varphi_{tt} + F_{xy} \psi_{tt}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} &= F_x \varphi_{aa} + F_y \psi_{aa} + L \varphi_a^2 + 2M \varphi_a \psi_a + N \psi_a^2 + F_1 \Delta A_t, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial a} &= F_x \varphi_a + F_y \psi_a + F_{xt} \varphi_{ta} + F_{yt} \psi_{ta}. \end{aligned}$$

Aus (a) folgt daher wegen (C'_1) $\bar{F}_x|_2 = 0$, $\bar{F}_y|_2 = 0$, d. h. (A_2) . Aus (b_1) resultiert infolgedessen $\bar{F}_x \bar{\varphi}_t + \bar{F}_y \bar{\psi}_t|_2 \geq 0$, also (B_2) . Da wegen (W) $F_x \varphi_a + F_y \psi_a|_2 = \bar{F}_x \bar{\xi} + \bar{F}_y \bar{\eta}|_2 = 0$, ist $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial a}|_2 = 0$. Und da wegen (B'_2) zudem $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} > 0$ gilt, ist $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial a} \right)^2 \geq 0$ äquivalent mit $\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \geq 0$. Es genügt daher, zur Ableitung einer notwendigen Bedingung die Relation $\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \geq 0$, also

$$(d) \quad L \varphi_a^2 + 2M \varphi_a \psi_a + N \psi_a^2 + F_1 \Delta A_t|_2 \geq 0$$

zu untersuchen.

5. Die notwendige Bedingung (C_{12}) . Zunächst werde (d) umgeformt. Da allgemein $F_x = L \varphi_t + M \psi_t$, $F_y = M \varphi_t + N \psi_t$ gilt, ist an der Stelle (t_2, a_0) :

$$\begin{aligned} L \varphi_a^2 + 2M \varphi_a \psi_a + N \psi_a^2 &= \varphi_a (L \varphi_a + M \psi_a) + \psi_a (M \varphi_a + N \psi_a) \\ &= -F_y (L \varphi_a + M \psi_a) + F_x (M \varphi_a + N \psi_a) \\ &= - (M \varphi_t + N \psi_t) (L \varphi_a + M \psi_a) + (L \varphi_t + M \psi_t) (M \varphi_a + N \psi_a) \\ &= (LN - M^2) \Delta = A_2 \Delta. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $F_1 \Delta|_2 = F_1 (\dot{a}_2 F_x + \dot{b}_2 F_y)|_2 = B_2$. Somit wird (d): $A_2 \Delta(t_2, a_0) + B_2 A_t(t_2, a_0) \geq 0$. Andererseits erhält man durch Differentiation der Identi-

täten $\bar{F}_x(t_2, a) = 0$, $\bar{F}_y(t_2, a) = 0$ nach a die Gleichungen

$$\bar{L}\bar{\varphi}_a + \bar{M}\bar{\psi}_a + \bar{F}_1(-\bar{\psi}_t)(-\bar{\psi}_{tt}\bar{\varphi}_a + \bar{\varphi}_{tt}\bar{\psi}_a - \bar{\psi}_t\bar{\varphi}_{ta} + \bar{\varphi}_t\bar{\psi}_{ta}) = 0,$$

$$\bar{M}\bar{\varphi}_a + \bar{N}\bar{\psi}_a + \bar{F}_1\bar{\varphi}_t(-\bar{\psi}_{tt}\bar{\varphi}_a + \bar{\varphi}_{tt}\bar{\psi}_a - \bar{\psi}_t\bar{\varphi}_{ta} + \bar{\varphi}_t\bar{\psi}_{ta}) = 0.$$

Argumente sind hierbei t_2, a . Multipliziert man die erste mit $\bar{\varphi}_a(t_2, a)$, die zweite mit $\bar{\psi}_a(t_2, a)$ und addiert, so erhält man $\bar{L}\bar{\varphi}_a^2 + 2\bar{M}\bar{\varphi}_a\bar{\psi}_a + \bar{N}\bar{\psi}_a^2 + \bar{F}_1\bar{\Delta}\bar{\Delta}_t = 0$. Speziell in (t_2, a_0) ist daher: $A_2\bar{\Delta}(t_2, a_0) + B_2\bar{\Delta}_t(t_2, a_0) = 0$. Liegt Fall I von (W) vor, so ist also wegen $\Delta(t_2, a_0) = \bar{\Delta}(t_2, a_0)$ und $B_2 > 0$ $\Delta_t - \bar{\Delta}_t|_2 \geq 0$. Ist Fall II von (W) erfüllt, so ergibt sich statt dessen: $\Delta_t - \bar{\Delta}_t|_2 \leq 0$. Man erhält so den Satz 1: *Seien die Voraussetzungen (W) erfüllt. Liefert dann E_0 ein Minimum, so gilt*

$$\Delta_t - \bar{\Delta}_t|_2 \geq 0, \quad \text{falls } \Delta = \bar{\Delta}|_2 > 0, \quad \Delta_t - \bar{\Delta}_t|_2 \leq 0, \quad \text{falls } \Delta = \bar{\Delta}|_2 < 0.$$

Dies sei die Bedingung (C_{12}) oder, falls sie durch Weglassen des Gleichheitszeichens verschärft ist, (C'_{12}) . Sie gilt es jetzt geometrisch zu interpretieren, was in verschiedener Weise geschehen soll.

6. (C_{12}) als Brennpunktsbedingung. Es werde die Existenz des rechtsseitigen Brennpunktes t'_2 von $\bar{a}$ auf E_0 vorausgesetzt, d.h. die erste auf t_2 folgende Nullstelle von $\bar{\Delta}(t, a_0)$ möge in $(t_2, T_2]$ liegen. Seien nun $u(t)$, $v(t)$ zwei nichttriviale Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit $u(t_2) = v(t_2) \neq 0$. Bezeichnet man die erste auf t_2 folgende Nullstelle von $u(t)$ bzw. $v(t)$ mit t'_1 bzw. t''_2 , so ergibt sich folgende Fallunterscheidung: $u(t_2) = v(t_2) > 0$. $t'_1 \geq t''_2$ dann und nur dann, wenn $\dot{u}(t_2) \geq \dot{v}(t_2)$ ist. $u(t_2) = v(t_2) < 0$. $t'_1 \leq t''_2$ dann und nur dann, wenn $\dot{u}(t_2) \leq \dot{v}(t_2)$ ist. Identifiziert man $u(t)$ mit $\Delta(t, a_0)$, $v(t)$ mit $\bar{\Delta}(t, a_0)$, so folgt, daß t'_1 nicht vor t''_2 liegen kann, da sonst die Ungleichung in Satz 1 nicht erfüllt wäre. Satz 2: *Seien die Voraussetzungen (W) erfüllt und stelle t'_1 bzw. t''_2 den rechtsseitigen Brennpunkt von a bzw. $\bar{a}$ auf E_0 dar. Liefert dann E_0 ein Minimum und existiert t'_2 , so liegt t'_1 nicht vor t''_2 .* Es ergibt sich hier also das genaue Analogon der BLISSschen Bedingung für Probleme mit zwei auf Kurven beweglichen Endpunkten.

7. Deutung von (C_{12}) mit Hilfe der Divergenz der Reißextremalenscharen. Falls t'_2 nicht existiert, ist diese geometrische Deutung von (C_{12}) nicht statthaft. Um dennoch zu einer anschaulichen Interpretation von (C_{12}) zu gelangen, betrachte man eine Extremalenschar $\mathfrak{f}$: $x = f(t, a)$, $y = g(t, a)$, die E_0 für $a = a_0$ enthält und deren Schardeterminante $D(t, a)$ an der Stelle $(t_2, a_0) \neq 0$ ist. Der Tangentenwinkel $\Theta(t, a)$ der beliebigen $\mathfrak{f}$ -Extremalen E im Punkt (t, a) ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} \Theta(t, a) = \frac{g_t(t, a)}{f_t(t, a)} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{ctg} \Theta(t, a) = \frac{f_t(t, a)}{g_t(t, a)}.$$

Es sei nun $\mathfrak{f}$: $t = \chi(a)$ eine glatte Jordankurve durch (t_2, a_0) mit $\dot{\chi}(a_0) = 0$, die im übrigen ganz beliebig sei. Bezeichnet $\tau(a) = \Theta(\chi(a), a)$ den Tangentenwinkel

von $\mathfrak{f}$ längs $\mathfrak{k}$, so ist seine Änderung im Punkt (t_2, a_0)

$$\dot{\tau}(a_0) = \frac{f_t g_t a - g_t f_t a}{f_t^2 + g_t^2} = \frac{D_t - (f_t t g_a - g_t t f_a)}{f_t^2 + g_t^2}$$

mit den Argumenten t_2, a_0 . $\dot{\tau}(a_0)$ ist von der Kurve $\mathfrak{k}$ unabhängig und werde als Divergenz von $\mathfrak{f}$ im Punkt (t_2, a_0) bezeichnet. Ist $\dot{\tau}(a_0) > 0$, wächst also $\tau(a)$ monoton bei $a = a_0$, so streben die von $\mathfrak{k}$ ausstrahlenden Extremalen auseinander, ist jedoch $\dot{\tau}(a_0) < 0$, $\tau(a)$ also monoton fallend bei $a = a_0$, so drängen sie sich zusammen. Seien nun zwei spezielle Scharen $\mathfrak{f}$, nämlich α und $\bar{\alpha}$ gegeben. Die Divergenz von α bzw. $\bar{\alpha}$ in (t_2, a_0) werde mit $\dot{\tau}(a_0)$ bzw. $\dot{\bar{\tau}}(a_0)$ bezeichnet. Dann ist $\dot{\tau}(a_0) - \dot{\bar{\tau}}(a_0) = \frac{1}{\dot{\alpha}_2^2 + \dot{\bar{\alpha}}_2^2} (\Delta_t(t_2, a_0) - \bar{\Delta}_t(t_2, a_0))$.

Satz 3. Seien die Voraussetzungen (W) erfüllt. Liefert dann E_0 ein Minimum und ist $\Delta(t_2, a_0) = \bar{\Delta}(t_2, a_0) > 0$ (< 0), so ist die Divergenz der Schar α im Punkt P_2 nicht kleiner (nicht größer) als die Divergenz der Schar $\bar{\alpha}$ im gleichen Punkt.

Bei der Ableitung von Satz 3 ist vom Begriff der Reißpunktcurve und der Reißextremalenschar kein Gebrauch gemacht. Lediglich die Ungleichung in Satz 1 sowie ganz allgemeine Eigenschaften von Extremalenscharen sind zugrunde gelegt. Es kann daher auch die BLISSsche Bedingung für Probleme mit auf Kurven beweglichen Endpunkten ganz analog zu Satz 3 ausgesprochen werden.

8. Die Nullkurve. Es ist nunmehr erforderlich, eine Kurve einzuführen, die der Reißextremalenschar α zugeordnet ist. Wegen (A_2) und (B'_2) gibt es eine Funktion $t = \chi(a)$, $|a - a_0| \leq \delta$, mit $F(\chi(a), a) = 0$, $|a - a_0| \leq \delta$, und $\chi(a_0) = t_2$. Da $\Delta(t_2, a_0) \neq 0$ und $\bar{\Delta}(t_2, a_0) \neq 0$, so ist die Abbildung einer Umgebung $|t - t_2| \leq \varepsilon$, $|a - a_0| \leq \delta$ von (t_2, a_0) auf die x, y -Ebene durch α und $\bar{\alpha}$ eineindeutig, so daß die Bilder $\mathfrak{Q}$ und $\bar{\mathfrak{Q}}$ dieser Umgebung einfach zusammenhängende, abgeschlossene Mengen bilden, welche P_2 im Innern enthalten. Infolgedessen ist

$$n: \quad x = \varphi(\chi(a), a) = m(a), \quad y = \psi(\chi(a), a) = n(a), \quad |a - a_0| \leq \delta,$$

ein JORDANSches Kurvenstück, das bei geeigneter Wahl von ε und δ $\mathfrak{Q}$ in zwei einfach zusammenhängende, punktfremde Mengen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zerlegt. Durch Differentiation von $F(\chi(a), a) = 0$ nach a ergibt sich $\dot{\chi}(a_0) = 0$, d. h. n berührt $\bar{\tau}$ in (t_2, a_0) . n ist also glatt. Da $F_t(t, a)|_2 - F_x \varphi_t + F_y \psi_t|_2 > 0$, darf man annehmen, daß in $|a - a_0| \leq \delta$ $F_t(\chi(a), a) > 0$. Daher können $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ so gewählt werden, daß in $\mathfrak{Q}_1$ $F(t, a) < 0$, auf n $F(t, a) = 0$ und in $\mathfrak{Q}_2$ $F(t, a) > 0$ ist. n werde als Nullkurve von α bezeichnet. Jeder E_0 einbettenden Extremalenschar, welche bei P_2 Feldcharakter zeigt, kann eine Nullkurve zugeordnet werden. Sie bildet gewissermaßen einen Ersatz für eine Schartransversale durch P_2 , über deren Existenz wegen $F|_2 = 0$ keine Aussage gemacht werden kann. Die Nullkurve von $\bar{\alpha}$ ist die Reißpunktcurve $\bar{\tau}$.

9. Verschärfung von (C_{12}) . (C_{12}) soll jetzt verschärft werden ohne Benutzung der Ungleichung des Satzes 1 auf einem geometrisch-konstruktiven

Weg. Es seien die Bezeichnungen der Fig. 1 gültig. Dabei sei $3 = (t_0, a_0)$ ein Punkt von E_0 mit $t_2 < t_0 \leq t_2 + h$, $h > 0$, der so gewählt ist, daß in ihm $F(t_0, a_0) > 0$, $\bar{F}(t_0, a_0) > 0$. Dann geht durch 3 genau eine Transversale t bzw. $\bar{t}$ von a bzw. $\bar{a}$, die vollständig auf derjenigen Seite der Nullkurve n bzw. der Rißpunkt-kurve $\bar{r}$ liegt, auf der F bzw. $\bar{F} > 0$ ist.

Werde nun angenommen, daß es in einer beliebig engen Umgebung des Punktes $(t_0, a_0) = 3$ einen Punkt 7 von $\bar{t}$ gibt, der auf der von $\bar{r}$ abgewandten Seite von $\bar{t}$ gelegen ist. Durch ihn geht eine Extremale E der Schar a , welche r in 4, $\bar{r}$ in 5, t in 6 schneide. Durch den Punkt 5 geht weiterhin eine Extremale $\bar{E}$ der Schar $\bar{a}$, die $\bar{t}$ in 8 schneiden möge. Der Extremalenbogen $\bar{E}_{58}$ ist in ein Extremalenfeld eingebettet, das transversal zu $\bar{t}$ ist, nämlich in $\bar{a}$. In der Umgebung von $\bar{t}$ ist dabei $\bar{F}(t, a) \neq 0$. Weiterhin ist längs $\bar{E}_{58}$ $F_1 > 0$,

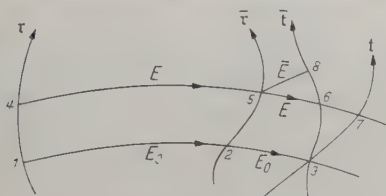


Fig. 1.

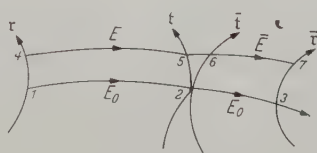


Fig. 2.

wie aus der für E_0 erfüllten verschärften LEGENDRE-Bedingung folgt. Daher liefert $\bar{E}_{58}$ ein Minimum unter allen stückweis glatten Kurven, die in 5 beginnen, in dem genannten Feld gelegen sind, auf $\bar{t}$ enden und deren Gefälle hinreichend wenig von demjenigen von $\bar{E}_{58}$ verschieden ist⁸⁾. Diese Voraussetzungen werden sicher erfüllt durch E_{56} , sofern von vornherein $\delta > 0$, welche Zahl ja die Ausdehnung des Definitionsbereiches von a und $\bar{a}$ bestimmt, hinreichend klein gewählt ist. Also ist $I(\bar{E}_{58}) \leq I(E_{56})$. Es ist nun $I(E_{13}) = I(E_{12}) + I(E_{23})$ und $I(E_{47}) = I(E_{45}) + I(E_{57})$, woraus $I(E_{12}) - I(E_{45}) = I(E_{13}) - I(E_{47}) + I(E_{57}) - I(E_{23})$ folgt. Wendet man den KNESERSchen Transversalensatz auf die Schar a an, so ergibt sich $I(E_{13}) = I(E_{47})$. Andererseits ist $I(E_{57}) > I(E_{56})$, denn nach Voraussetzung liegt 7 auf E hinter 6, und 6 und 7 liegen auf der Seite der Nullkurve n von a , auf der $F(t, a) > 0$ ist, wenn man nur $\delta > 0$ hinreichend klein wählt. Somit ist $I(E_{57}) > I(\bar{E}_{58})$. Wendet man jetzt den Transversalensatz auf die Schar $\bar{a}$ an, so erhält man $I(\bar{E}_{58}) = I(E_{23})$. Somit ist $I(E_{57}) > I(E_{23})$. Es resultiert daher $I(E_{12}) > I(E_{45})$, was ausgeschlossen ist, wenn E_0 ein Minimum von $I(C)$ liefert. Daher ist die gemachte Annahme falsch, d. h.: t liegt in einer Umgebung von 3 nicht auf der $\bar{r}$ abgewandten Seite von $\bar{t}$.

Etwas anders ist der Beweis für diese Aussage, wenn für den Punkt (t_0, a_0) $t_0 < t_2$ gilt, im übrigen aber analoge Voraussetzungen wie für $t_2 < t_0$ gültig sind (Fig. 2). Es sei dabei 5 der Punkt von t , welcher in einer beliebig engen Umgebung von $(t_0, a_0) = 2$ liegt und auf der $\bar{r}$ abgewandten Seite von $\bar{t}$ gelegen ist. Durch

⁸⁾ BOLZA, 324.

ihn geht eine Extremale E von a , welche r in 4 schneide, und eine Extremale $\bar{E}$ von $\bar{a}$, die $\bar{r}$ in 6, $\bar{r}$ in 7 treffe. Es ist dann $5 < 6 < 7$. Wendet man den KNESERSCHEN Transversalensatz auf die Schar a an, so ergibt sich $I(E_{45}) = I(E_{12})$. Auf $\bar{a}$ angewandt, liefert er $I(\bar{E}_{67}) = I(\bar{E}_{23}) = I(E_{23})$. Daher ist $I(E_{12}) + I(E_{23}) = I(E_{45}) + I(\bar{E}_{67})$. Da auf $\bar{E}$ $5 < 6 < 7$, ist $I(\bar{E}_{56}) < 0$ und daher $I(E_{12}) + I(E_{23}) > I(E_{45}) + I(\bar{E}_{56}) + I(\bar{E}_{67})$ oder $I(E_{13}) > I(E_{45} + E_{57})$. Somit ist die gemachte Annahme nicht zutreffend. *Satz 4: Seien die Voraussetzungen (W) erfüllt. Dann gibt es ein $h > 0$ so, daß durch jeden Punkt $P_0 = (t_0, a_0)$ mit $t_2 - h \leq t_0 \leq t_2 + h$, $t_0 \neq t_2$, genau eine Transversale t bzw. $\bar{t}$ von a bzw. $\bar{a}$ geht, welche beiden Kurven sich in P_0 berühren. Liefert E_0 ein Minimum, so kann h so gewählt werden, daß t in einer hinreichend engen Umgebung von P_0 nicht auf der von $\bar{r}$ abgewandten Seite von $\bar{t}$ liegt. Diese Bedingung sei durch $(\bar{C}_{12})$ bezeichnet.*

Aus Satz 4 kann man durch Einführung der Krümmungen $\varkappa$ bzw. $\bar{\varkappa}$ von t bzw. $\bar{t}$ in P_0 folgern: Liefert unter den Voraussetzungen von Satz 4 E_0 ein Minimum und ist $\Delta(t_2, a_0) > 0$, so gibt es ein $h > 0$ so, daß für jedes Transversalenpaar $t, \bar{t}$ durch (t_0, a_0) mit $t_2 - h \leq t_0 < t_2$ ($t_2 < t_0 \leq t_2 + h$) $\varkappa \leq \bar{\varkappa}$ ($\geq \bar{\varkappa}$) gilt. Ist $\Delta(t_2, a_0) < 0$, so gilt umgekehrt $\varkappa \geq \bar{\varkappa}$ ($\leq \bar{\varkappa}$). Diese Ungleichung ist der Ungleichung des Satzes 1 äquivalent, denn man kann zeigen, daß

$$\varkappa - \bar{\varkappa} = \frac{F_1 A^2}{(q_a^2 + \psi_a^2)} \cdot \frac{A_t - \bar{A}_t}{F} \Big|_0.$$

Also folgt aus $(\bar{C}_{12})$ in der Tat (C_{12}) . Hingegen kann man aus (C'_{12}) $(\bar{C}_{12})$ folgern, wie sich aus der letzten Gleichung ergibt.

10. Hinreichende Bedingungen.

10.1. Durch Kombination der hinreichenden Bedingung für ein Minimum bei Problemen mit freiem Anfangs- und festem Endpunkt und der hinreichenden Bedingung für gewöhnliche Minima erhält man ohne Schwierigkeiten den Satz 5: *Sind die Voraussetzungen (V) erfüllt, ist E_0 doppelpunktfrei und genügt der verschärften WEIERSTRASS-Bedingung und gelten schließlich (A_1) , (B'_1) , (C'_1) , (A_2) , (B'_2) und (C'_{12}) , so liefert E_0 ein relatives starkes eigentliches Minimum.* Daß die JACOBISCHE Bedingung und (C_2) nicht aufgeführt sind, erklärt sich dadurch, daß dieselben aus (C'_1) und (C'_{12}) auf Grund allgemeiner Sätze über lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung folgen.

10.2. Setzt man statt (C'_{12}) nur $(\bar{C}_{12})$ voraus, so kann man nicht mehr folgern, daß E_0 ein eigentliches Minimum liefert. Denn der vorher ausgeschlossene Fall, daß a mit $\bar{a}$ identisch ist, kann jetzt eintreten. Dann sind r und $\bar{r}$ Transversalen von a . Es ist daher, wenn man den zwischen r und $\bar{r}$ gelegenen Bogen einer beliebigen a -Extremalen mit E bezeichnet, auf Grund des Transversalensatzes $I(E) = I(E_0)$. Daher ergibt sich hier als hinreichende Bedingung nur der Satz 6: *Sind die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, jedoch mit $(\bar{C}_{12})$ an Stelle von (C'_{12}) , so erzeugt E_0 ein relatives starkes Minimum.* Beweis: a bildet ein Feld um E_0 , welches das Gebiet U der x, y -Ebene bedeckt. Man konstruiere um P_1 eine Umgebung $\mathfrak{B}_1$ in folgender Weise: Durch den Punkt

$(t_1 - h, a_0)$ mit $h > 0$ ziehe man die Transversale t_1 von a . Falls $h > 0$ hinreichend klein, existiert sie in $|a - a_0| \leq \delta$ und hat keinen Punkt mit r gemein. Dann werde unter $\mathfrak{A}_1$ die einfach zusammenhängende abgeschlossene Punktmenge der x, y -Ebene verstanden, die begrenzt wird durch die Kurven t_1 , $E_{a_0 - \delta}$, $E_{a_0 + \delta}$ und $\bar{t}_1$: $x = \varphi(t_1 + h, a)$, $y = \psi(t_1 + h, a)$, $|a - a_0| \leq \delta$. Falls $\delta > 0$, $h > 0$ hinreichend klein, wird sie durch r in zwei einfach zusammenhängende Mengen zerlegt, auf deren einer, kein Stück des Bogens $[t_1, t_2]$ von E_0 enthaltender $F(t, a) > 0$ ist, während auf der anderen $F(t, a) < 0$ gilt. Ganz entsprechend werde eine Umgebung $\mathfrak{A}_2$ von P_2 konstruiert. Sei C eine zulässige Kurve, die in $\mathfrak{A}_1$ gelegen ist, deren Anfangspunkt sich in $\mathfrak{A}_1$ befindet, während ihr Endpunkt in $\mathfrak{A}_2$ liegt. Man darf für den weiteren Beweis annehmen, daß

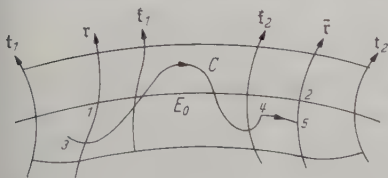


Fig. 3.

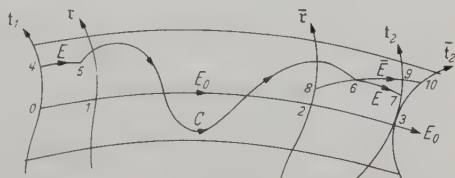


Fig. 4.

ersterer nicht hinter r , letzterer nicht vor $\bar{r}$ gelegen ist. Denn: Liege etwa ihr Endpunkt 4 (s. Figur 3) vor $\bar{r}$. Dann geht durch 4 genau eine Extremale $\bar{E}$ von $\bar{a}$. Bezeichnet man $C + \bar{E}_{45}$ mit $\bar{C}$, so ist $I(\bar{C}) = I(C) + I(\bar{E}_{45})$, also wegen $I(\bar{E}_{45}) < 0$ $I(\bar{C}) < I(C)$. Zeigt man daher, daß E_0 ein starkes Minimum unter den Kurven $\bar{C}$ liefert, deren Endpunkt auf $\bar{r}$ liegt, so gilt dasselbe erst recht für die genannten Kurven C . Liege nunmehr die in Fig. 4 dargestellte Situation vor. Nach dem HILBERTschen Unabhängigkeitssatz ist $I(E_{01}) + I(E_{12}) + I(E_{23}) = I(E_{45}) + H(C) + I(E_{67})$, wobei $H(C)$ das längs C genommene HILBERTsche unabhängige Integral ist, also $I(E_{12}) = H(C) + I(E_{45}) - I(E_{01}) + I(E_{67}) - I(E_{23})$ und daher $\Delta I = I(C) - I(E_{12}) = \int_C \mathcal{L} dt + I(E_{01}) - I(E_{45}) + I(E_{23}) - I(E_{67})$, wo $\mathcal{L}$ die WEIERSTRASSsche $\mathcal{L}$ -Funktion auf dem Feld a bezeichnet. Hierin ist $I(E_{01}) \geq I(E_{45})$ auf Grund des Transversalensatzes. Weiterhin geht durch 6 genau eine Extremale $\bar{E}$ von $\bar{a}$. Da nun E_{67} ein relatives Minimum unter allen stückweis glatten Kurven liefert, die in 6 beginnen und auf t_2 enden, ist $I(E_{67}) \leq I(\bar{E}_{69})$. Andererseits ist $I(\bar{E}_{69}) \leq I(\bar{E}_{8,10})$. Da auf Grund des auf die Schar $\bar{a}$ angewandten Transversalensatzes $I(E_{23}) = I(\bar{E}_{23}) = I(\bar{E}_{8,10})$, gilt $I(E_{67}) \leq I(E_{23})$. Damit hat man $\Delta I = \int_C \mathcal{L} dt + \kappa(C)$, wo beide Summanden ≥ 0 sind, was bei ersterem aus der WEIERSTRASS-Bedingung folgt.

III. Probleme mit einem freien und einem auf einer Kurve beweglichen Endpunkt.

Aus Symmetriegründen genügt es, Probleme mit kurvenbeweglichem Anfangspunkt und freiem Endpunkt zu betrachten.

1. *Zulässige Kurven.* Gegeben das Gebiet $\mathfrak{G}_2$ der x, y -Ebene und darin die Kurve $\bar{t}$: $x = \xi(a)$, $y = \eta(a)$, $a_1 < a < a_2$, von der Klasse $C^{(2)}$. Die stückweis

glatte Kurve $C: x=x(t), y=y(t), t_1 \leq t \leq t_2$, heiße zulässig, wenn

$$(1) \quad (x(t), y(t)) \in \mathfrak{G}_2 \quad \text{für} \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$(2) \quad (x(t_1), y(t_1)) \in \mathfrak{k},$$

$$(3) \quad (x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2)).$$

2. *Relatives Minimum.* Die zulässige Kurve $E_0: x=x_0(t), y=y_0(t), t_1 \leq t \leq t_2$, mit dem Anfangspunkt $(x_0(t_1), y_0(t_1)) = P_1 = (\xi(a_0), \eta(a_0))$ und dem Endpunkt $(x_0(t_2), y_0(t_2)) = P_2$ liefert ein relatives starkes Minimum von $I(C)$, wenn eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von E_0 , ein $\mathfrak{k}$ -Bogen $\mathfrak{b}: x=\xi(a), y=\eta(a), |a-a_0| \leq \varepsilon$, und eine Umgebung $\mathfrak{B}$ von P_2 mit $\mathfrak{b}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{B} = 0$ existieren derart, daß für jede zulässige Kurve $C \subset \mathfrak{U}$ mit $(x(t_1), y(t_1)) \in \mathfrak{b}$ und $(x(t_2), y(t_2)) \in \mathfrak{B}$ $I(C) \geq I(E_0)$ gilt. Definition des eigentlichen Minimums wie in I.3.

3. Falls zwischen E_0 und $\mathfrak{k}$ im gemeinsamen Punkt P_1 keine Berührung stattfindet, lassen sich die bei den Methoden mit freien Endpunkten angewandten Verfahren sowie die dort erhaltenen Resultate sinngemäß übertragen. Man hat nur statt der durch P_1 gehenden Reißpunktcurve mit ihrer Reißextremalenschar die Kurve $\mathfrak{k}$ und die zu ihr transversale, E_0 einbettende Extremalenschar zu nehmen. Wenn sich jedoch E_0 und $\mathfrak{k}$ in P_1 berühren, ist die Existenz letzterer Schar nicht mehr gesichert. Dieser Fall wird im folgenden untersucht.

4. *Voraussetzungen.* Es wird also $\dot{a}_1 \eta(a_0) - \dot{b}_1 \dot{\xi}(a_0) = 0$ vorausgesetzt. Soll E_0 ein Minimum liefern, so muß die Transversalitätsbedingung $\dot{\xi} F_x + \dot{\eta} F_y|_1 = 0$ gelten. Da $\dot{x} F_x + \dot{y} F_y = F$, muß $F|_1 = 0$ sein. Eine weitere notwendige Bedingung für ein Minimum durch E_0 ist die Ungleichung $A_1 \leq 0$ mit

$$A_1 = \ddot{\xi} F_x + \ddot{\eta} F_y + L \dot{\xi}^2 + 2M \dot{\xi} \dot{\eta} + N \dot{\eta}^2|_1.$$

Diese der Brennpunktsbedingung entsprechende Relation heiße (B_1) , ihre Verschärfung $A_1 < 0$ (B'_1) . Diese Voraussetzungen einschließlich (V') , (A_2) , (B'_2) und (C_2) seien mit $(\bar{W})$ bezeichnet.

5. Berührung 1. Ordnung zwischen E_0 und $\mathfrak{k}$.

5.1. Es existiert eine Extremalenschar $\alpha: x=q(t, a), y=\psi(t, a), |a-a_0| \leq \delta, T_1 \leq t \leq T_2$, welche E_0 für $a=a_0$ enthält und für die $q(t_1, a) = \xi(a), \psi(t_1, a) = \eta(a)$ sowie $q_t(t_1, a) = \dot{\xi}(a), \psi_t(t_1, a) = \dot{\eta}(a)$, die also $\mathfrak{k}$ gleichsinnig berührt. Infolgedessen gilt für die Schardeterminante $\Delta(t, a)$ von α $\Delta(t_1, a) = 0, \Delta_t(t_1, a) = (\dot{\xi}^2(a) + \dot{\eta}^2(a))^{\frac{3}{2}} \cdot (\kappa(a) - k(t_1, a))$, wenn $\kappa(a)$ die Krümmung von $\mathfrak{k}$ in a , $k(t, a)$ die Krümmung der α -Extremalen E_a im Punkt t ist. Falls E_0 und $\mathfrak{k}$ keine Berührung von höherer als der 1. Ordnung haben, ist bei a_0 $\Delta_t(t_1, a) \neq 0$. Dann bildet α in $t_1 \leq t \leq t_1 + h, |a-a_0| \leq \delta$ für genügend kleines $h, \delta > 0$ ein Feld⁹⁾. Da vorausgesetzt ist, daß die verschärfte JACOBI-Bedingung gilt, folgert man hieraus weiter, daß α in $t_1 \leq t \leq T_2, |a-a_0| \leq \delta$ ein Feld um E_0

⁹⁾ Siehe etwa BOLZA: Existence proof for a field of extremals tangent to a given curve. Trans. Amer. Math. Soc. 8, 399—404 (1907).

bildet, sofern E_0 doppelpunktfrei ist. Auf diesem Feld $\mathfrak{U}$ gilt der HILBERTSche Unabhängigkeitssatz natürlich dann, wenn man ihn auf E_0 und eine mit Ausnahme von P_1 im Feldinneren gelegene zulässige Kurve anwendet, aber auch noch dann, wenn die zulässige Kurve in zwei Teile zerfällt, von denen der eine ein $\mathfrak{f}$ -Bogen ist, während der zweite im $\mathfrak{U}$ -Inneren liegt.

5.2. Da $\frac{d}{da} F(t_1, a)|_{a=a_0} = A_1 < 0$ ist, gilt

$$F(t_1, a) > 0 \quad \text{in} \quad a_0 - \delta \leq a < a_0, \quad F(t_1, a) = 0 \quad \text{in} \quad a_0,$$

$$F(t_1, a) < 0 \quad \text{in} \quad a_0 < a \leq a_0 + \delta.$$

Nun ist das HILBERTSche Integral längs $\mathfrak{f}$ von a_0 bis a_1 mit $a_1 > a_0$ gegeben durch

$$H(\mathfrak{f}_{01}) = \int_{a_0}^{a_1} (F_x(t_1, a) \dot{x}(a) + F_y(t_1, a) \dot{y}(a)) da = \int_{a_0}^{a_1} F(t_1, a) da,$$

das HILBERTSche Integral längs der entgegengesetzt $\mathfrak{f}$ orientierten Kurve $\mathfrak{f}^{-1}$

von a_0 bis a_1 mit $a_0 > a_1$ durch $H(\mathfrak{f}_{01}^{-1}) = - \int_{a_0}^{a_1} F(t_1, a) da$. Also ist $H(\mathfrak{f}_{01}) < 0$ für $a_1 > a_0$, $H(\mathfrak{f}_{01}^{-1}) < 0$ für $a_1 < a_0$.

5.3. Auf Grund von (A_2) , (B'_2) und $\Delta(t_2, a_0) \neq 0$ kann man den Kurvenparameter a von $\mathfrak{f}$ auf $\bar{\mathfrak{t}}$ als zulässigen Parameter einführen. Diese Transformation denke man sich von vornherein durchgeführt und durch zulässige Parametertransformationen in t und a die bekannten Verhältnisse bei P_2 hergestellt.

Dann ist $\Delta(t_2, a_0) = \bar{\Delta}(t_2, a_0) \neq 0$, woraus

$$\Delta(t, a_0) - \bar{\Delta}(t, a_0) = (\Delta_t(t_2, a_0) - \bar{\Delta}_t(t_2, a_0)) w_2(t), \quad T_1 \leq t \leq T_2,$$

folgt. Dabei ist $w_2(t)$ diejenige Lösung der zu E_0 gehörigen JACOBISchen Differentialgleichung, welche den Anfangsbedingungen $w_2(t_2) = 0$, $\dot{w}_2(t_2) = 1$ genügt. Werde jetzt $\Delta(t_2, a_0) < 0$ angenommen, da für $\Delta(t_2, a_0) > 0$ die folgende Überlegung analog ist. Es sei gleichzeitig $\Delta_t(t_2, a_0) > \bar{\Delta}_t(t_2, a_0)$. Dann gilt wegen $w_2(t) < 0$ in $[t_1, t_2]$ $\Delta(t, a_0) - \bar{\Delta}(t, a_0) < 0$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Da $\Delta(t_1, a_0) = 0$, muß $\bar{\Delta}(t_1, a_0) > 0$ sein. Andererseits ist aber $\bar{\Delta}(t_2, a_0) = \Delta(t_2, a_0) < 0$. Also müßte in (t_1, t_2) mindestens eine Nullstelle von $\bar{\Delta}(t, a_0)$ liegen, was der Voraussetzung (C_2) widerspricht. Somit muß für $\Delta(t_2, a_0) < 0$ $\Delta_t(t_2, a_0) \leq \bar{\Delta}_t(t_2, a_0)$ gelten. Es gilt also in P_2 : $\Delta_t - \bar{\Delta}_t \geq 0$ für $\Delta > 0$, $\Delta_t - \bar{\Delta}_t \leq 0$ für $\Delta < 0$. Ersetzt man (C_2) durch (C'_2) , so kann man in den letzten beiden Ungleichungen die Gleichheitszeichen weglassen.

Obwohl diese Aussage ihrer Form nach ein Analogon zu (C_{12}) darstellt, ist sie keine neu hinzutretende notwendige Bedingung für ein Minimum durch E_0 , sondern ergibt sich aus den bereits vorhandenen notwendigen Bedingungen. Bei dem vorliegenden Problem gibt es also kein Analogon der BLISSschen Bedingung, welches zusätzlich zu den bereits vorhandenen notwendigen Bedingungen hinzutreten muß, ehe E_0 ein Minimum liefern kann.

5.4. Macht man nun die Voraussetzungen $(\bar{W})$, wobei jedoch (C_2) zu (C'_2) verschärft sei, und nimmt außerdem an, daß E_0 doppelpunktfrei ist, der

verschärften WEIERSTRASS-Bedingung genügt und mit $\mathfrak{f}$ in P_1 eine Berührung von genau 1. Ordnung hat, so liefert E_0 ein eigentliches Minimum unter allen zulässigen Kurven, die in dem oben konstruierten Feld um E_0 liegen, nur ihren Anfangspunkt mit $\mathfrak{f}$ gemeinsam haben und deren Endpunkt in einer hinreichend engen Umgebung von P_2 liegt. Dies zeigt man auf Grund der bisherigen Resultate durch eine Konstruktion, die der beim Beweise von Satz 6 durchgeführten analog ist. Ist statt (C'_2) nur (C_2) erfüllt, so ergibt sich mit Hilfe des ZERMELO-KNESERSchen Enveloppensatzes, daß E_0 kein Minimum unter den eben definierten Kurven zu liefern braucht.

6. Berührung beliebiger Ordnung zwischen E_0 und $\mathfrak{f}$.

6.1. Zu der gegebenen Kurve $\mathfrak{f}$ läßt sich stets eine Schar berührender Extremalen konstruieren, welche E_0 enthält. Falls jedoch E_0 und $\mathfrak{f}$ in P_1 eine Berührung von höherer als der 1. Ordnung haben, ist die Determinante dieser Schar längs E_0 identisch Null. Es läßt sich dann nicht mehr nachweisen, daß sie ein Feld um E_0 bildet, auch nicht im kleinen. Daß dies tatsächlich nicht der Fall zu sein braucht, sieht man an dem extremen Fall des Zusammenfallens von $\mathfrak{f}$ mit dem E_0 -Bogen um den Punkt P_1 . Es tritt hier zum erstenmal in der Behandlung der vorliegenden Probleme der Fall ein, daß es nicht möglich ist, eine E_0 enthaltende Extremalenschar zu konstruieren, die durch das Problem in irgendeiner Weise ausgezeichnet ist. Um letzteres zu lösen, muß daher die bisher angewandte Methode des Scharintegrals aufgegeben und statt ihrer ein anderes Verfahren benutzt werden: Die Methode des Extremalenintegrals¹⁰⁾.

6.2. Da E_0 eine Extremale ist und die verschärfte LEGENDRE- und JACOBI-Bedingung erfüllt, gibt es ein $\delta > 0$ so, daß von jedem Punkt $(x_1, y_1) \in \mathfrak{D}_1$: $|x_1 - a_1| < \delta$, $|y_1 - b_1| < \delta$ nach jedem Punkt $(x_2, y_2) \in \mathfrak{D}_2$: $|x_2 - a_2| < \delta$, $|y_2 - b_2| < \delta$ genau eine Extremale $\bar{E}$ geht. Ihr Tangentenwinkel in ihrem Anfangspunkt sei $\vartheta(x_1, y_1, x_2, y_2)$. Diese Extremalenmenge ist gegeben durch

$$\bar{E}: \begin{aligned} x &= X(t - t_1, x_1, y_1, \vartheta(x_1, y_1, x_2, y_2)) \\ y &= Y(t - t_1, x_1, y_1, \vartheta(x_1, y_1, x_2, y_2)) \end{aligned}$$

$$\mathfrak{G}_5: T_1 \leq t \leq T_2, (x_1, y_1) \in \mathfrak{D}_1, (x_2, y_2) \in \mathfrak{D}_2.$$

Der Punkt (x_1, y_1) entspricht dem Parameterwert t_1 , der Punkt (x_2, y_2) dem Parameterwert $t_2(x_1, y_1, x_2, y_2)$. Auf $\mathfrak{G}_5$ ist $X_t^2 + Y_t^2 > 0$ und $F_1(X, Y, X_t, Y_t) > 0$. Außerdem liegt $\bar{E}$ in einer beliebig engen Umgebung von E_0 , falls δ hinreichend klein.

Bezeichnet man insbesondere diejenigen Extremalen $\bar{E}$, die auf $\mathfrak{f}$ beginnen, mit E , so ist

$$E: \begin{aligned} x &= X(t - t_1, \xi(a), \eta(a), \vartheta(\xi(a), \eta(a), x_2, y_2)) = \bar{X}(t; a, x_2, y_2) = x(t), \\ y &= Y(t - t_1, \xi(a), \eta(a), \vartheta(\xi(a), \eta(a), x_2, y_2)) = \bar{Y}(t; a, x_2, y_2) = y(t), \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Siehe BOLZA, 306—313.

$t_1 \leq t \leq t_2$, $|a - a_0| \leq \varepsilon$, $(x_2, y_2) \in \mathfrak{D}_2$, wo ε eine hinreichend kleine Zahl > 0 ist. Ist das längs E genommene Variationsintegral $I(\xi(a), \eta(a), x_2, y_2) = J(a, x_2, y_2)$, so sind die ersten und zweiten Ableitungen desselben an der Stelle $a = a_0$, $(x_2, y_2) = (a_2, b_2) = P_2$:

$$J_a = -(\dot{\xi} F_x + \dot{\eta} F_y)|_1, \quad J_{x_2} = F_{\dot{x}}|_2, \quad J_{y_2} = F_{\dot{y}}|_2,$$

$$J_{aa} = -A_1 + F_1(t_1) (\dot{x}_0(t_1) \dot{\eta}(a_0) - \dot{y}_0(t_1) \dot{\xi}(a_0))^2 z_1(t_2) = -A_1,$$

$$J_{ax_2} = \frac{1}{w_1(t_2)} F_1(t_1) \dot{y}_0(t_2) (\dot{x}_0(t_1) \dot{\eta}(a_0) - \dot{y}_0(t_1) \dot{\xi}(a_0)) = 0,$$

also $J_{x_2 a} = 0$,

$$J_{x_2 x_2} = L(t_2) - F_1(t_2) \dot{y}_0^2(t_2) z_2(t_1),$$

$$J_{y_2 y_2} = N(t_2) - F_1(t_2) \dot{x}_0^2(t_2) z_2(t_1),$$

$$J_{x_2 y_2} = M(t_2) + F_1(t_2) \dot{x}_0(t_2) \dot{y}_0(t_2) z_2(t_1).$$

Hierin ist $z_1(t) = \frac{\omega_1(t)}{w_1(t)}$, wobei $w_1(t)$, $\omega_1(t)$ die Lösungen der zu E_0 gehörigen JACOBIschen Differentialgleichung mit $w_1(t_1) = 0$, $\dot{w}_1(t_1) = 1$, $\omega_1(t_1) = 1$, $\dot{\omega}_1(t_1) = 0$ sind, und Entsprechendes gilt für $z_2(t)$.

6.3. Damit E_0 unter den Kurven E ein Minimum liefert, muß $J(a, x_2, y_2)$ für $a = a_0$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$ ein Minimum besitzen. Dazu ist notwendig, daß für dieses Wertetripel

$$J_a = 0, \quad J_{x_2} = 0, \quad J_{y_2} = 0 \quad \text{und}$$

$$J_{aa} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} J_{aa} & J_{ax_2} \\ J_{ax_2} & J_{x_2 x_2} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} J_{aa} & J_{ax_2} & J_{ay_2} \\ J_{x_2 a} & J_{x_2 x_2} & J_{x_2 y_2} \\ J_{y_2 a} & J_{y_2 x_2} & J_{y_2 y_2} \end{vmatrix} \geq 0$$

gilt. Läßt man in den letzteren Ungleichungen das Gleichheitszeichen weg, so sind die so erhaltenen Bedingungen hinreichend für ein eigentliches Minimum durch E_0 bezüglich der Extremalen E .

Die Auswertung der ersten vier Relationen liefert

$$\dot{\xi} F_x + \dot{\eta} F_y|_1 = 0, \quad F_{\dot{x}}|_2 = 0, \quad F_{\dot{y}}|_2 = 0, \quad A_1 \leq 0,$$

also (A_1) , (A_2) , (B_1) . Im folgenden werde wieder $A_1 < 0$, also $J_{aa}|_2 > 0$ vorausgesetzt. Damit wird aus den beiden Determinantenbedingungen

$$J_{x_2 x_2}|_2 \geq 0, \quad J_{x_2 x_2} J_{y_2 y_2} - J_{x_2 y_2}^2|_2 \geq 0.$$

Diese beiden gilt es jetzt weiter zu behandeln, zunächst die erstere.

Aus den Gleichungen für $J_{x_2 x_2}$, $J_{y_2 y_2}$, $J_{x_2 y_2}$ folgt

$$\dot{x}^2 J_{x_2 x_2} + 2 \dot{x} \dot{y} J_{x_2 y_2} + \dot{y}^2 J_{y_2 y_2}|_2 = \dot{x}^2 L + 2 \dot{x} \dot{y} M + \dot{y}^2 N|_2 = Q(\dot{x}, \dot{y})|_2.$$

Man denke sich nun eine Drehung des Koordinatensystems ausgeführt so, daß die Tangente an E_0 in t_2 die Neigung Null hat. Dann transformiert sich

das vorgelegte Variationsproblem in ein äquivalentes Problem¹¹⁾. Dabei gehe $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ in $(u, v, \dot{u}, \dot{v})$ und $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ in $G(u, v, \dot{u}, \dot{v})$ über. Dann gilt $\dot{v}_0(t_2) = 0$, also $\dot{u}_0(t_2) \neq 0$, wenn nach der Transformation $E_0: u = u_0(t), v = v_0(t), t_1 \leq t \leq t_2$. Obige quadratische Form ist invariant gegen diese Transformation, denn es ist $Q(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}F_x + \dot{y}F_y = \dot{u}G_u + \dot{v}G_v = \dot{u}^2\tilde{L} + 2\dot{u}\dot{v}\tilde{M} + \dot{v}^2\tilde{N} = \tilde{Q}(\dot{u}, \dot{v})$, wo $\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$ die transformierten Funktionen L, M, N sind. Denkt man sich diese Transformation von vornherein durchgeführt und dann die Methode des Extremalenintegrals angewandt, so ergibt sich bei Beibehaltung der alten Bezeichnungen $Q(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^2 J_{x_2 x_2}$, also $Q(\dot{x}, \dot{y})|_2 \geq 0$. Da Q invariant, ist auch nach der Rücktransformation $Q(\dot{x}, \dot{y})|_2 \geq 0$, d. h. $\dot{x}F_x + \dot{y}F_y|_2 \geq 0$, womit (B_2) abgeleitet ist.

Unter der etwas stärkeren Voraussetzung (B'_2) geht $J_{x_2 x_2} J_{y_2 y_2} - J_{x_2 y_2}^2|_2 \geq 0$ über in $A_2 - B_2 z_2(t_1) \geq 0$ oder $A_2 w_2(t_1) - B_2 \omega_2(t_1) \leq 0$. Die Funktion $\Omega(t) = A_2 w_2(t) - B_2 \omega_2(t)$ stellt eine wegen $\Omega(t_2) = -B_2$ nichttriviale Lösung der zu E_0 gehörigen JACOBISCHEN Differentialgleichung dar, für die $A_2 \Omega + B_2 \dot{\Omega}|_2 = 0$ gilt. Andererseits ist $A_2 \bar{A} + B_2 \bar{A}'|_2 = 0$ und daher $\bar{A}(t, a_0) = c\Omega(t)$ mit $c \neq 0$. Es ist nun $\Omega(t_1) \leq 0$. Daher kann $\Omega(t)$ in (t_1, t_2) keine Nullstelle haben. Denn da $\Omega(t_2) < 0$ ist, müßte $\Omega(t)$ sonst in $[t_1, t_2]$ mindestens zwei verschiedene Nullstellen besitzen. Da jedoch $\Omega(t)$ von $w_2(t)$ linear unabhängig ist und $w_2(t)$ auf Grund der verschärften JACOBISCHEN Bedingung in $[t_1, t_2]$ nicht verschwindet, ist dies ausgeschlossen. Also ist $\Omega(t) < 0$ in $(t_1, t_2]$ und damit $\bar{A}(t, a_0) \neq 0$ in $(t_1, t_2]$. Aus obiger Determinantenbedingung folgt somit (C_2) .

Umgekehrt ergeben sich aus $(A_1), (B'_1), (A_2), (B'_2), (C'_2)$ die Relationen $J_a = 0, J_{x_2} = 0, J_{y_2} = 0, J_{aa} > 0, J_{x_2 x_2} > 0, J_{x_2 x_2} J_{y_2 y_2} - J_{x_2 y_2}^2 > 0$, d. h. E_0 liefert dann ein eigentliches Minimum unter den Extremalen E .

6.4. Auf Grund der in 6.3. erhaltenen Resultate läßt sich unter Benutzung einer Methode, die von A. ROSENBLATT für Probleme mit kurvenbeweglichen Endpunkten entwickelt wurde¹²⁾ und die sich mit geringfügigen Modifikationen auf das vorliegende Problem übertragen läßt, als hinreichende Bedingung Satz 7 herleiten:

Besitzt die Extremale E_0 in P_1 eine Berührung beliebiger Ordnung mit ξ , so sind die verschärfte LEGENDRESCH, JACOBISCHE und WEIERSTRASSSCHE Bedingung sowie $(A_1), (B'_1), (A_2), (B'_2), (C'_2)$ zusammen hinreichend für ein relatives starkes eigentliches Minimum von $I(C)$ durch E_0 , sofern E_0 doppelpunktfrei ist.

¹¹⁾ BOLZA, 344.

¹²⁾ Sur les problèmes du calcul des variations etc. Krak. Anz. 1919, 36—39.

Physikalisches Wörterbuch

Herausgegeben von

Wilhelm H. Westphal, Berlin

Zwei Teile in einem Band

Mit etwa 10500 Stichwörtern und 1595 Textfiguren. VI, 833 und 795 Seiten. 1952

Halbfranz DM 148.—

Aus den Besprechungen:

Zuverlässige Nachschlagewerke werden bei der ständigen Erweiterung der Physik immer unentbehrlicher. Es ist daher zu begrüßen, daß WESTPHAL ein dem neuesten Stand der Forschung entsprechendes Werk geschaffen hat, das eine rasche Orientierung über Fragen aus allen Gebieten der Physik ermöglicht. Gegenüber dem vor 20 Jahren im gleichen Verlag erschienenen Handwörterbuch von BERLINER und SCHEEL stellt das Physikalisches Wörterbuch ein völlig neues Werk dar, insbesondere durch Hinzunahme der physikalischen Chemie, Astrophysik, sowie in gewissem Umfang der Bio- und Geophysik. Selbst die wichtigsten Kapitel aus der Mathematik fehlen nicht. 10500 Begriffe werden von 80 Bearbeitern, die als hervorragende Sachkenner ihrer Gebiete bekannt sind, erläutert. Zahlreiche gute Abbildungen (darunter die von RÖNTGENS Jagdgewehr unter dem Stichwort Werkstoffprüfung) erhöhen die Anschaulichkeit. Eine weise Beschränkung auf das eigentliche Erkenntnisgut unter weitgehendem Verzicht auf rein technische Anwendungen kommt dem Werk nur zustatten, da es dadurch noch als ein Doppelband herausgebracht werden konnte. Der Anhang enthält einen Abriß der Geschichte der Physik, Lebensdaten von 800 bedeutenden Physikern, Tabellen mit wichtigen Konstanten und Umrechnungsfaktoren und einen Nachtrag der während des Druckes eingegangenen Ergänzungen.

Das ausgezeichnete Werk wird sicher mit Beifall aufgenommen werden. In erster Linie wendet es sich an den Physiker, der sich über ihm weniger geläufige Gebiete informieren will, wobei die vielen Literaturhinweise sehr nützlich sind. Selbstverständlich ist das Buch auch Wissenschaftlern der Nachbargebiete zu empfehlen. Wer sich beispielsweise über den *dynamischen* Photoelektronenvervielfacher, Isotopentrennung, Wasserstofflampe, V-Teilchen oder sonstige physikalische Begriffe unterrichten will, wird gerne zum Handwörterbuch der Physik greifen, das von den Abbildungsgesetzen bis zur Zylinderwelt Antwort auf ungezählte Fragen gibt. „*Zeitschrift für angewandte Physik*“

... Der Zweck des Werkes liegt vor allem in der Arbeitserleichterung für den Leser. Das Gebiet erstreckt sich nicht allein auf Physik, sondern auch über die physikalische Chemie und Astrophysik, die heute wichtige Zweiggebiete darstellen. Im gewissen Umfange wurde auch die Geophysik und die Biophysik berücksichtigt. Hierdurch ergab sich eine gewisse Beschränkung, welche sich auf die mehr technischen Anwendungsmöglichkeiten beziehen. Daß gerade in den schwierigen Zeiten nach Beendigung des Krieges ein derartiges Riesenwerk erscheinen konnte, stellt dem Verlag wohl das beste Zeugnis aus. Es zeigt wie kein anderes Werk den gegenwärtigen Stand der physikalischen Erkenntnisse unserer Zeit und wird dem deutschen Schrifttum zur hohen Ehre gereichen. Es erübrigt sich daher, das Werk allen Fachgelehrten aufs wärmste zu empfehlen. „*Acta Physica Austriaca*“

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von **R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. I. van der Waerden.**

Zuletzt erschienene Bände:

LIII. Band:

Rechenmethoden der Quantentheorie dargestellt in Aufgaben und Lösungen

I. Teil: Elementare Quantenmechanik. Von Dr. **Siegfried Flügge**, o. Professor an der Universität Marburg, unter Mitarbeit von Dr. **Hans Marshall**, Privatdozent an der Universität Marburg. Zweite, völlig neubearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 30 Abbildungen. VIII, 272 Seiten. 1952. DM 29.80; Ganzleinen DM 32.80

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — I. Einkörperprobleme. A. Kräftefreier Fall. — B. Konservative Kräfte. 1. Eindimensionale Probleme: Stückweise konstante Potentiale. Periodische Potentiale. Harmonischer Oszillator. Stetig veränderliche Potentiale. — 2. Zylindersymmetrische Probleme. — 3. Kugelsymmetrische Probleme: Kugelfunktionen und Drehimpulsoperator. Geheimer Rotator. Eigenwertprobleme. Streuprobleme, anomale Streuung, RUTHERFORD-Streuung. — 4. Näherungsverfahren: RITZsches Verfahren. Störungsrechnung. BORNsche Näherung. WKB-Verfahren. SCHWINGERSches Variationsverfahren. — C. Nichtkonservative Kräfte. 1. Stationäre Probleme: ZEEMAN-Effekt. Dispersionstheorie. — 2. Intensitätsfragen: Matricelemente, Übergangswahrscheinlichkeiten für Dipolstrahlung. — 3. Nichtstationäre Probleme: System mit zwei Zuständen. DIRACsches Näherungsverfahren. Photoeffekt. Streuprozeß. — II. Zwei- und Mehrkörperprobleme. 1. Spin- und Symmetriefragen: Spinfunktionen und Spinoperatoren. Spinabhängige Kräfte. — 2. Eigenwertprobleme: Zwei gleiche gekoppelte Teilchen, Austausch. — 3. Stoß zweier Teilchen: Schwerpunktssystem und Schwerpunktssatz. Symmetrische und antisymmetrische Wellenfunktion im COULOMB-Feld, Stoßanregung. — 4. Vielkörperprobleme: Elektronengas, weißer Zwerg. Magnetismus des Elektronengases. Feldemission. THOMAS-FERMI-Modell. Gemischte Dichte. — Sachverzeichnis.

LXII. Band:

Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen

Von Dr. **Robert Sauer**, o. Professor für Mathematik und analytische Mechanik an der Technischen Hochschule München. Mit 63 Abbildungen. XIV, 229 Seiten. 1952. DM 26.—; Ganzleinen DM 29.—

Inhaltsübersicht: I. Gegenüberstellung von Anfangswert- und Randwertproblemen. — II. Differentialgleichungen 1. Ordnung. — III. Systeme quasilinearer Differentialgleichungen 1. Ordnung und die allgemeine Differentialgleichung 2. Ordnung bei zwei unabhängigen Veränderlichen. — IV. Systeme quasilinearer Differentialgleichungen 1. Ordnung und die quasilinearen Differentialgleichungen 2. Ordnung bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen. — Namen- und Sachverzeichnis.

LXIII. Band:

Quadratische Formen und orthogonale Gruppen

Von Dr. sc. nat. **Martin Eichler**, Professor an der Universität Münster i. Westf. XII, 220 Seiten. 1952. DM 24.60; Ganzleinen DM 27.60

Inhaltsübersicht: I. Algebra der metrischen Räume. — II. Metrische Räume über perfekten diskret bewerteten Körpern. — III. Die elementare Arithmetik der metrischen Räume über algebraischen Zahl- und Funktionskörpern. — IV. Vektoren und Ideale. — V. Die höhere Arithmetik der metrischen Räume, insbesondere über dem Körper der rationalen Zahlen. — Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg. Printed in Germany.